

اختبار الثلاثي الأول

التمرين الأول : (08 نقاط)

عين الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير (أي إجابة دون تبرير لا تؤخذ بعين الاعتبار)

معدوم	موجب تماما	سالب تماما
0	1	2
0	1	2
$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$[0; +\infty[$

(1) العدد :  $\frac{1}{2} \ln(125) + 2 \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln\sqrt{5}$  هو عدد :(2) عدد حلول المعادلة :  $e^{3x} - x - 1 = 0$  هو :(3) عدد حلول المعادلة :  $(\ln x)^2 = \ln(x^2)$  هو :(4) حلول المتراجحة :  $e^x - e^{-x} \geq 0$  هي :(5) الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$  هي دالة :

زوجية	فردية	ليست زوجية وليست فردية
-------	-------	------------------------

(6) منحنى الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$  يقبل نقطة انعطاف فواصلها من الشكل :

$x = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}/k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$
---	---	--

(7) الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  بـ :  $h(x) = \frac{mx^2}{x^2-1}$  حيث  $m \in \mathbb{R}^*$  تقبل قيمة حدية محلية وحيدة من أجل :

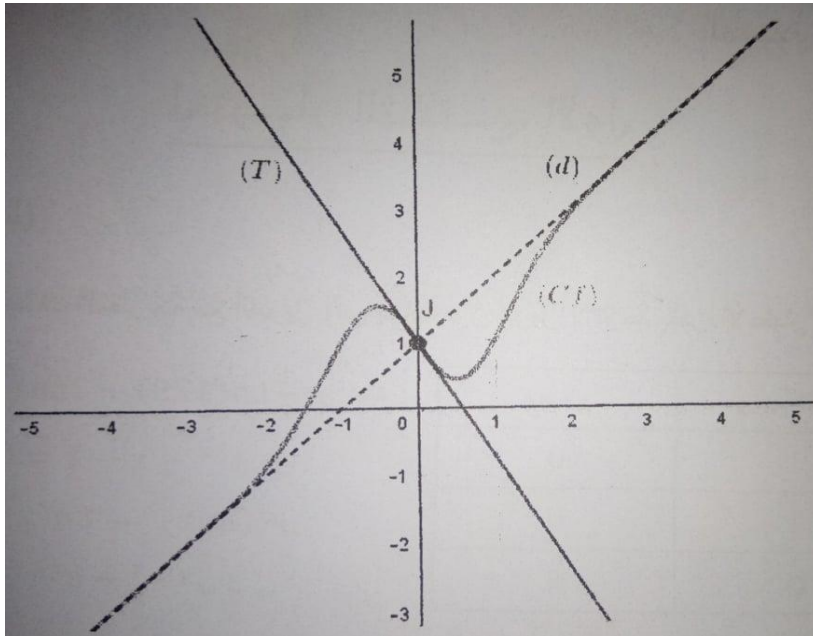
$m \in \mathbb{R}_+^*$	$m \in \mathbb{R}^*$	$m \in \mathbb{R}_-^*$
------------------------	----------------------	------------------------

(8) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :  $y = y' - 1$  الذي يحقق  $y(\ln 2) = 1$  هو :

$x \mapsto e^x - 1$	$x \mapsto e^{(1-x)} - 1$	$x \mapsto e^{\frac{1}{2}(x+1)} + 1$
---------------------	---------------------------	--------------------------------------

التمرين الثاني : (12 نقطة)

(I) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة والقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ، عبارتها هي :  $f(x) = mx + p + (ax + b)e^{-x^2}$  وليكن  $(C_f)$  منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(0; \vec{i}; \vec{j})$ . (انظر الشكل).✎ المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا  $(d)$  بجوار  $+\infty$  و  $-\infty$ .✎ المستقيم  $(T)$  هو المماس للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 والذي معادلته :  $y = (1 - e)x + 1$  :  $(T)$ .  
✎ النقطة  $J(0; 1)$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$ .



(1) اكتب معادلة المستقيم (d) .

(2) علما أن  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (xe^{-x^2}) = 0$  ، عين قيمتي كل من  $m$  و  $p$  .

(3) احسب قيمة المجموع :  $f(-x) + f(x)$  ، حيث  $x \in \mathbb{R}$  .

(4) باستعمال بعض المعلومات السابقة عين كلا من  $a$  و  $b$  .

(II) بوضع :  $a = -e$  ،  $b = 0$  و  $m = p = 1$  .

(1)

(أ) بين أن  $f'$  مشتقة الدالة  $f$  زوجية .

(ب) بين أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$  .

(ج) ادرس تغيرات الدالة  $f'$  وشكل جدول تغيراتها .

(د) برهن أن المعادلة  $f'(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث :  $0.51 < \alpha < 0.52$  ثم استنتج حصر  $\beta$  .

(2) عين معادلتني مماسي  $(C_f)$  ،  $(T_1)$  و  $(T_2)$  الموازيان لـ (d) .

(3)

(أ) ارسم  $(T_1)$  و  $(T_2)$  في المعلم السابق.

(ب) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة :  $f(x) = x + m$  .

انتهى الموضوع

# عروض حل لاختبار التفاضل

## الأول

وفيه للمعادلة حان

(3) عدد حلول المعادلة  $(\ln x)^2 = \ln(x^2)$  هو:  $\frac{0,27}{0,73}$

التبرير:  $\frac{0,27}{0,73}$

$$(\ln x)^2 = \ln(x^2)$$

$$(\ln x)^2 - \ln(x^2) = 0$$

$$(\ln x)^2 - 2 \ln x = 0$$

$$\ln x (\ln x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \ln 1 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

(4) حلول المعادلة:  $e^x - e^{-x} = 0$   $\frac{0,27}{0,73}$

$$e^x - e^{-x} = 0$$

$$e^x = e^{-x}$$

$$x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x \in [0; +\infty[$$

(5) الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{2})$  هي دالة زوجية.  $\frac{0,27}{0,73}$

$$f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{2})$$

$$f(-x) = 3 \sin(-2x - \frac{\pi}{2}) = 3 \sin(-(2x + \frac{\pi}{2}))$$

$$f(-x) = -3 \sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 3 \sin((2x + \frac{\pi}{2}) - \pi)$$

$$f(-x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = f(x)$$

$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\alpha)$$

(6) منحنى الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = 3 \cos(2x - \frac{\pi}{2})$  يتقاطع مع الخط  $y = 0$  في نقطتين فقط.  $\frac{0,27}{0,73}$

$$x = \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}$$

$$g(x) = 3 \cos(2x - \frac{\pi}{2})$$

$$g'(x) = -6 \sin(2x - \frac{\pi}{2})$$

$$g''(x) = -12 \cos(2x - \frac{\pi}{2}) \rightarrow g''(x) = 0$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{4} / k \in \mathbb{Z}$$

التمرين الأول: (08 نقاط)

تدوين الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير:

(1) العدد:  $\frac{1}{2} \ln(125) + 2 \ln(\frac{1}{5}) + \ln \sqrt{5}$  هو:  $\frac{0,27}{0,73}$

عدد:  $\frac{0,27}{0,73}$

$$\frac{1}{2} \ln(125) + 2 \ln(\frac{1}{5}) + \ln \sqrt{5} = \frac{1}{2} \ln(5^3) + 2 \ln(5^{-1}) + \ln(5^{\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{3}{2} \ln 5 - 2 \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 5$$

$$= \frac{3}{2} \ln 5 - 2 \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 5 = 0$$

(2) عدد حلول المعادلة:  $e^{3x} - x - 1 = 0$  هو:  $\frac{0,27}{0,73}$

$$e^{3x} - x - 1 = 0$$

$$f(x) = e^{3x} - x - 1$$

$$f'(x) = 3e^{3x} - 1$$

$x \in \mathbb{R}$  من أجل  $f(x) = 0$  لدينا:

$$3e^{3x} - 1 = 0$$

$$3e^{3x} = 1$$

$$e^{3x} = \frac{1}{3} \rightarrow 3x = \ln(\frac{1}{3}) \rightarrow x = -\frac{\ln 3}{3}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{\ln 3}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\geq 0,11$	$+\infty$

الدالة  $f$  مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال  $]-\infty; -\frac{\ln 3}{3}[$  و  $f(-\frac{\ln 3}{3}) < 0$

وفيه حسب مبرهنة القيمة المتوسطة  $f(x) = 0$  له حل واحد فقط  $x = -\frac{\ln 3}{3}$

الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تمامًا على المجال  $]-\frac{\ln 3}{3}; +\infty[$  و  $f(-\frac{\ln 3}{3}) < 0$

وفيه حسب مبرهنة القيمة المتوسطة فإن "معادلة  $f(x) = 0$  له حل واحد فقط  $x = -\frac{\ln 3}{3}$ "

$$f(x) - (mx + p) = (ax + b)e^{-x^2}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + p)) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (ax + b)e^{-x^2}$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (ax e^{-x^2} + b e^{-x^2})$$

$$= 0$$

و من هنا  
 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (mx + p) = 0$   
 أي أن المستقيم والمعادلة  $y = mx + p$  هما  $y$  للنقطة  $(q)$  في مجاور  $\pm\infty$  وموافقا لتقييم (d)

(d):  $y = x + 1$   
 $y = mx + p$

بالبطاقة:  $m = p = 1$  (0,1)

(3) - حساب قيمة المتوسط:  $f(x) + f(-x)$  حيث  $x \in \mathbb{R}$

النقطة  $J(0; 1)$  هي مركز تناظر  $(q)$

فإن:  $f(2(0) - x) + f(x) = 2(1)$

$f(-x) + f(x) = 2$  (0,2)

تدعي مركز التناظر:  $f(2(a) - x) + f(x) = 2p$   
 $J(a; b)$  مركز تناظر  $(q)$

(4) - تدعي  $a$  و  $b$ :

$f(-x) + f(x) = 2$

$f(-x) + f(x) = mx + p - axe^{-x^2} + be^{-x^2} + mx + p + axe^{-x^2} + be^{-x^2}$   
 $p = 1$

$f(-x) + f(x) = 2p + 2be^{-x^2} = 2 + 2be^{-x^2}$

$2 + 2be^{-x^2} = 2$   
 $2be^{-x^2} = 0$

$e^{-x^2} \neq 0$  و من هنا:  $b = 0$  (0,3)

نجد هنا: المعامل  $(T)$  للنقطة  $(q)$  في النقطة  $(T)$  القائمة  $0$  و الذي هو  $1 - c$   
 $(T): y = (1 - c)x + 1$

$f'(0) = 1 - c$   
 $f'(x) = m + a e^{-x^2} - 2ax e^{-x^2} = m + a e^{-x^2} - 2ax e^{-x^2}$   
 $f'(a) = m + a e^{-a^2} - 2ax e^{-a^2}$   
 $f'(x) = 1 + a e^{-x^2} - 2ax e^{-x^2}$   
 $f'(0) = 1 + a$

(7) - الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ :

حيث  $h(x) = \frac{mx^2}{x^2 - 1}$   $m \in \mathbb{R}^*$  قابل قسمة عددية  
 مخرج و عدد من أجل:  $m \in \mathbb{R}^*$  (0,1)

$h(x) = \frac{mx^2}{x^2 - 1}$  (0,2)

$h'(x) = \frac{2mx(x^2 - 1) - 2x(mx^2)}{(x^2 - 1)^2}$

$h'(x) = \frac{2mx^3 - 2mx - 2mx^3}{(x^2 - 1)^2}$

$h'(x) = \frac{-2mx}{(x^2 - 1)^2}$

$h'(x) = 0$   
 $x = 0$  إذا كان

(8) - الحل الخاص للمعادلة التفاضلية:  $y = y' - 1$   
 الذي يحقق  $y(\ln 2) = 1$  هو:  $x \mapsto e^x - 1$  (0,2)

$y = y' - 1$   
 $y' = y + 1$

$x \mapsto c e^{x^2} - 1$

$c e^{\ln 2} - 1 = 1$

$2c = 2 \rightarrow c = 1$

و من هنا:  $x \mapsto e^x - 1$

التمرين الثاني: (12 نقطة)

(I)  
 (1) - معادلة المستقيم (d):

النقطتان:  $B(-1; 0)$  و  $A(0; 1)$   
 تتقاطع في المستقيم (d)

(d):  $y = ax + b$   
 $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 + 1} = 1 = 1$  (0,3)

$1 = 1(0) + b$

$b = 1$  (0,4)

و من هنا: (d):  $y = x + 1$  (0,5)

(2) - تدعي قيمتي  $m$  و  $p$   
 $f(x) = mx + p + (ax + b)e^{-x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x^2 e^{-x^2+1} - e^{-x^2+1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + 2 \frac{x^2}{e^{x^2}} e - \frac{e}{e^{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + 2 \left( \frac{x}{e^x} \right)^2 e - \frac{e}{e^{x^2}} \right) = 1 \quad \text{OIV}$$

$$f''(x) = 4x e^{-x^2+1} - 2x e^{-x^2+1} (2x^2 - 1)$$

$$f''(x) = 4x e^{-x^2+1} - 4x^3 e^{-x^2+1} - 2x e^{-x^2+1}$$

$$f''(x) = (4x - 4x^3 - 2x) e^{-x^2+1}$$

$$f''(x) = -2x(-2 + 2x^2 - 2) e^{-x^2+1}$$

$$f''(x) = -2x(2x^2 - 3) e^{-x^2+1} \quad \text{OIV}$$

بما أن  $f''(x) = 0$  في  $x = 0$  و  $2x^2 - 3 = 0$

$$2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{أو} \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$-2x$	+	+	0	-	-
$2x^2 - 3$	+	0	-	-	+
$f''(x)$	+	0	-	+	-
$f'(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

د. برهان أن المعادلة  $f''(x) = 0$  تقبل حلين فقط حيث  $0,51 < a < 0,52$  ثم استنتاج صيغة  $p$  والدالة  $f'$  مستمرة وقرابة  $\alpha$  ما على  $[0,51, 0,52]$  و  $f'(0,51) < f'(0,52)$  وفي حسب جبرونة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f''(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث  $0,51 < \alpha < 0,52$  استنتاج صيغة  $p$  كما أن  $f'$  زوجية فإن  $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$  وفي  $\beta = -\alpha$

$$1+a = 1-e$$

$$a = -e$$

$$f(x) = x+1 - e x e^{-x^2} \quad \text{(II)}$$

تبين أن  $f'$  مشتقة الدالة زوجية:  $f'(x) = f'(-x)$

$$f(x) + f(-x) = 2$$

$$f'(x) + (-f'(x)) = 0$$

$$f'(x) = f'(-x)$$

$$f'(x) = 1 + a e^{-x^2} - 2a x^2 e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 1 - e e^{-x^2} - 2e x^2 e^{-x^2}$$

$$f'(-x) = 1 - e e^{-(-x)^2} - 2e (-x)^2 e^{-(-x)^2}$$

$$f'(-x) = 1 - e e^{-x^2} - 2e x^2 e^{-x^2} = f'(x)$$

$$f'(x) = 1 + (2x^2 - 1) e^{-2x^2+1}$$

$$f'(x) = 1 - e e^{-x^2} - 2e x^2 e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x^2+1} (1 - 2x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 2x^2 e^{-x^2+1} - e^{-x^2+1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 2x^2 e^{-x^2} e - e^{-x^2} e)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x^2 e^{-x^2} e - e^{-x^2} e)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + 2 \frac{x^2}{e^{x^2}} e - \frac{1}{e^{x^2}} e \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + 2 \left( \frac{x}{e^x} \right)^2 e - \frac{1}{e^{x^2}} e \right) = 1 \quad \text{OIV}$$

$$(T_2): y = 1 \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{e}$$

$$(T_2): y = x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2e}}{2}$$

$$(T_2): y = x + 1 + \frac{\sqrt{2e}}{2} \quad \text{OIR}$$

③ - 1 - رسم (T1) و (T2) OIR

ن. الحل الثاني:

الحل الثاني للمعادلة  $f(x) = x + m$  هي نقاط تقاطع

(OIR) مع المستقيم ذو المعادلة  $y_m = x + m$

الموازاة لـ (d), (T1), (T2) OIR x 7

- إذا كان  $m < 1 - \frac{\sqrt{2e}}{2}$  فإن للمعادلة  $f(x) = x + m$  2 نقطتين.

- إذا كان  $m = 1 - \frac{\sqrt{2e}}{2}$  فإن للمعادلة تقبل حلًا واحدًا صافياً  $2$  موهباً تماماً.

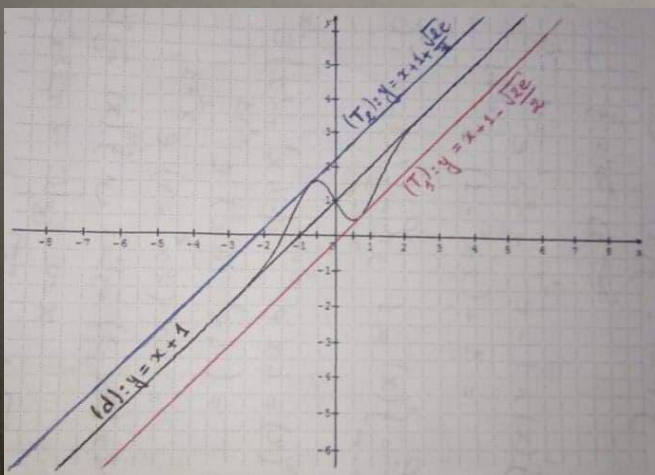
- إذا كان  $1 - \frac{\sqrt{2e}}{2} < m < 1$  فإن للمعادلة تقبل حلين حقيقين حقيقين تماماً.

- إذا كان  $m = 1$  فإن للمعادلة تقبل حلًا واحدًا معدوماً.

- إذا كان  $1 + \frac{\sqrt{2e}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{2e}}{2}$  فإن للمعادلة تقبل حلين حقيقين حقيقين تماماً.

- إذا كان  $m = 1 + \frac{\sqrt{2e}}{2}$  فإن للمعادلة تقبل حلًا واحدًا صافياً تماماً.

- إذا كان  $m > 1 + \frac{\sqrt{2e}}{2}$  فإن للمعادلة تقبل حلين حقيقين حقيقين تماماً.



② - تعيين معادلتين هما (OIR) و (T3) الموازيات لـ (d).

$$(d): y = x + 1$$

عمل المعادلة:

$$f'(x) = 1$$

$$1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2 + 1} = 1$$

$$(2x^2 - 1)e^{-x^2 + 1} = 0$$

بما  $e^{-x^2 + 1} \neq 0$  إذن

$$2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ أو } x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

أو

$$(OIR) \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ أو } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(T1): y = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + (2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1)e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} = 1 + (1 - 1)e^{-\frac{1}{2} + 1} = 1$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \left(\frac{2 \times \frac{1}{2} - 1}{1}\right)e^{-\frac{1}{4} + 1} = 1$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - e \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3}{4}}$$

$$(T1): y = 1 \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{e}$$

$$(T1): y = x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2e}}{2}$$

$$(T1): y = x + 1 - \frac{\sqrt{2e}}{2} \quad \text{OIR}$$

$$(T2): y = f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + e \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{4} + 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3}{4}}$$