

اختبار الفصل الأول

تمرين 1 (4 نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، وأربع كريات سوداء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 2 ، 3 وخمس كريات خضراء تحمل الأرقام 4 ، 4 ، 5 ، 5 ، 5. (لا نفرق بينها عند اللمس)
نسحب من هذا الكيس كرتين في آن واحد بطريقة عشوائية.
1) A و B حادثتان حيث: A: "سحب كرتين إحداها سوداء تحمل الرقم 2 والثانية لونها مختلف"، و B: "سحب كرتين تحملان رقمين مجموعهما أكبر تماما من 3". بيّن أن $P(A) = \frac{4}{11}$ و $P(B) = \frac{19}{22}$ ، ثم استنتج حساب $P(A \cup B)$.
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب الرقم الأكبر بين رقمي الكرتين المسحوبتين، والرقم 6 إذا كانت الكرتان تحملان نفس الرقم.

أ) عيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي X ، ثم بيّن أن: $P(X = 4) = \frac{7}{33}$ و $P(X = 6) = \frac{1}{6}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

3) نجري الآن n سحبة متتالية لكرية بحيث نعيد في كل مرة الكرية المسحوبة إلى الكيس.

أ) عبّر بدلالة العدد الطبيعي n الاحتمال P_n للحصول على الكريات البيضاء فقط، ثم عيّن أكبر قيمة للعدد n بحيث يكون $P_n \geq 0,002$.

ب) احسب احتمال سحب كرية واحدة فقط بيضاء.

تمرين 2 (4 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بعدها الأول $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} - 4$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-3 \leq u_n < -2$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 2)(u_n + 4)}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n + 4}$. استنتج اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} + 2 \geq (2 - \sqrt{2})(u_n + 2)$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 > u_n + 2 \geq -(2 - \sqrt{2})^n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بعدها الأول v_0 ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{u_n + 4}{2}\right)$.

أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية، أساسها $q = \frac{1}{4}$ ، يطلب كتابة حدّها العام بدلالة n .

ب) نضع $P_n = (u_0 + 4) \times (u_1 + 4) \times \dots \times (u_n + 4)$. بيّن أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $P_n = 2^{2^{-n} + n - 1}$.

تمرين 3 (5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $M.(O; \vec{u}, \vec{v})$ نقطة لاحقها العدد المركب z ، حيث $z = x + iy$ ،

x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب z حيث $z \neq -i$ العدد المركب Z : $Z = \frac{iz + 5}{z + i}$.

(1) بين أن الكتابة الجبرية للعدد المركب Z هي: $Z = \frac{6x}{x^2 + (y+1)^2} + i \frac{x^2 + y^2 - 4y - 5}{x^2 + (y+1)^2}$.

(2) عيّن وأنشئ المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

(3) عيّن وأنشئ المجموعة E_2 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا، مع ذكر العناصر المميّزة لـ E_2 .

(4) عيّن وأنشئ المجموعة E_3 للنقط M من المستوي حتى تكون طويلة $Z + i$ تساوي 2 بمعنى $|Z + i| = 2$.

(5) عيّن وأنشئ المجموعة E_4 للنقط M من المستوي بحيث يتحقّق $Z = \bar{z}$.

تمرين 4 (7 نقاط)

I- الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; +\infty[$ بـ: $g(x) = x(x-2-e^{-x})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(2) بين أن: $g'(x) = (x-1)(e^{-x} + 2)$ ، ادرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g .

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في \mathbb{R} حلين، أحدهما معدوم والآخر α حيث $2,1 < \alpha < 2,2$. استنتج إشارة $g(x)$.

II- الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = x + \frac{e^{-x} + 1}{x-1}$.

ليكن (\mathcal{C}) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. فسّر نتيجتي النهايتين هندسيا.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وبيّن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

ج) بين أن المنحني (\mathcal{C}) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

(2) أ) بين أن: من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) ليكن (T) المماس للمنحني (\mathcal{C}) عند النقطة ذات الفاصلة β . بين أن المماس (T) يشمل النقطة A حيث $A(1,0)$

إذا تحقّق: $(\beta+1)(e^{-\beta} + 1) = 0$. استنتج أن معادلة المماس (T) هي: $y = \frac{3+e}{4}(x-1)$.

(3) أ) بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) احسب $f(-2)$ ، ثم ارسم المستقيم المقارب (Δ) ، المماس (T) والمنحني (\mathcal{C}) .

(4) m وسيط حقيقي، ولتكن f_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f_m(x) = x + \frac{e^{-x} + m}{x-1}$ و (\mathcal{C}_m) تمثيلها البياني.

أ) p و q عددين حقيقيين موجبين تماما حيث $p < q$. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (\mathcal{C}_p) و (\mathcal{C}_q) .

ب) عيّن قيمة العدد الحقيقي m حتى تكون الدالة f_m هي حل للمعادلة التفاضلية: $(x-1)y' + x(y-1) = x^2$.

تصحيح اختبار الفصل الأول 2021

تمرين 1: عبد المطلب

$$P(A) = \frac{C_3^1 \times C_8^1}{C_{12}^2} = \frac{4}{11} \quad (1)$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_2^1 C_4^1 + C_2^2}{C_{12}^2} = 1 - \frac{3}{22} = \frac{19}{22}$$

$$P(B) = \frac{C_{10}^2 + C_2^1 C_6^1}{C_{12}^2} \text{ أو } X = \{2, 3, 4, 5, 6\} \quad (2)$$

$$P(X=4) = \frac{C_2^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{7}{33}$$

$$P(X=6) = \frac{C_2^2 + C_4^2 + C_2^2 + C_3^2}{66} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \frac{C_3^1 \times C_4^1}{66} = \frac{21}{22}$$

(ب) قانون الاحتمال المتغير X:

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = 2 \times \frac{4}{33} + \frac{3}{11} + 4 \times \frac{7}{33} + 5 \times \frac{9}{22} + \frac{6}{6} = \frac{97}{22} = 4,409$$

$$P_n = \frac{3^n}{12^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (3)$$

$$4^n \leq 500 \text{ أي } \frac{1}{4^n} \geq 0,002 \text{ يعني } P_n \geq 0,002$$

$$n \leq 4,48, n \leq \frac{\ln 500}{\ln 4}, \ln 4^n \leq \ln 500$$

و هنا: $n=4$

$$P = n \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{n}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (ب)$$

$$P = n \left(\frac{1 \times 3^{n-1}}{12^n}\right) = \frac{n}{4^n} \quad (ب)$$

تمرين 2:

$$(1) (P) n=0: u_0 = -3 \text{ و } -2 < u_0 < -3 \text{ (تةزة)}$$

$$\text{نفرص أن } -2 < u_n < -3 \text{ ونفرص أن } -2 < u_{n+1} < -3$$

$$\text{لدينا: } -2 < u_n < -3 \text{ و } -4 < 2u_n < -6$$

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n+8} < 2 \text{ ; } 2 \leq 2u_n+8 < 4$$

$$-3 \leq \sqrt{2} - 4 \text{ و } \sqrt{2} - 4 \leq \sqrt{2u_n+8} - 4 < -2$$

$$\text{و هنا: } -2 < u_{n+1} < -3 \text{ و } -3 < u_n < -2 \text{ } \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n+8} - 4 - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n+8}-4-u_n)(\sqrt{2u_n+8}+4+u_n)}{\sqrt{2u_n+8}+4+u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+8 - (4+u_n)^2}{\sqrt{2u_n+8}+4+u_n} = \frac{2(u_n+4) - (u_n+4)^2}{\sqrt{2u_n+8}+4+u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = - \frac{(u_n+2)(u_n+4)}{\sqrt{2u_n+8}+4+u_n} > 0$$

$$\text{أن } -2 < u_n < -3 \text{ و } -1 < u_{n+2} < 0 \text{ (موجب)}$$

$$\text{و } -1 < u_n < 0 \text{ (ب ل و)}$$

لذا (u_n) متزايدة و سالبة.

u_n متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة

$$(2) (P) \text{ لدينا: } u_{n+2} - 2 = \frac{(\sqrt{2u_n+8}-2)(\sqrt{2u_n+8}+2)}{\sqrt{2u_n+8}+2}$$

$$u_{n+1} + 2 = \frac{2(u_n+2)}{\sqrt{2u_n+8}+2}$$

$$\text{لذا: } (2-\sqrt{2})(u_n+2) > u_{n+1} + 2 \text{ "كافئ"}$$

$$\frac{2(u_n+2)}{\sqrt{2u_n+8}+2} > (2-\sqrt{2})(u_n+2) \quad (u_n+2 < 0)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2u_n+8}+2} < 2-\sqrt{2} \text{ أي}$$

$$\text{لدينا لـ } \sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n+8} < 2 \text{ و هنا}$$

$$2 + \sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n+8} + 2 < 4 \text{ وعند استعمال المتكافئ}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{\sqrt{2u_n+8}+2} \leq \frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

$$\text{لدينا: } 2 - \sqrt{2} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$\text{و هنا: } \frac{2}{\sqrt{2u_n+8}+2} < 2-\sqrt{2} \text{ أي}$$

$$u_{n+1} + 2 \geq (2-\sqrt{2})(u_n+2)$$

$$(ب) n=0: u_0 + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^0 \text{ أي } -1 > -1$$

$$\text{نفرص أن } u_n + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^n$$

$$\text{ونفرص صحة: } u_{n+1} + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^{n+1}$$

$$\text{لدينا: } (2-\sqrt{2}) \times [u_n + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^n]$$

$$0 > (2-\sqrt{2})(u_n+2) \geq -(2-\sqrt{2})^{n+1}$$

$$\text{و هنا: } u_{n+1} + 2 \geq (2-\sqrt{2})(u_n+2)$$

$$\text{و هنا: } u_{n+1} + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^{n+1}$$

$$\text{لذا } \forall n \in \mathbb{N} : u_n + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^n$$

$$\text{لدينا: } 1 < 2-\sqrt{2} < 1 \text{ و هنا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2-\sqrt{2})^n = 0$$

$$\text{باستعمال مبرهنة الكسور: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n+2) = 0$$

$$\text{و هنا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{u_{n+1}+4}{2} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{\sqrt{2u_n+8}}{2} \right) \quad (3)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2 \times 2^n} \ln \left(\frac{2u_n+8}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^n} \ln \left(\frac{u_n+4}{2} \right) = \frac{1}{4} v_n$$

$$\text{و هنا: } v_n = v_0 q^n = -\ln 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$(u_n+4) = 2 e^{2^n v_n} \text{ و هنا: } \ln \left(\frac{u_n+4}{2} \right) = 2^n v_n$$

$$(u_n+4) = 2 e^{2^n \left(\frac{-\ln 2}{4^n} \right)} = 2 \left(e^{-\ln 2} \right)^{\frac{1}{2^n}} = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2^n}}$$

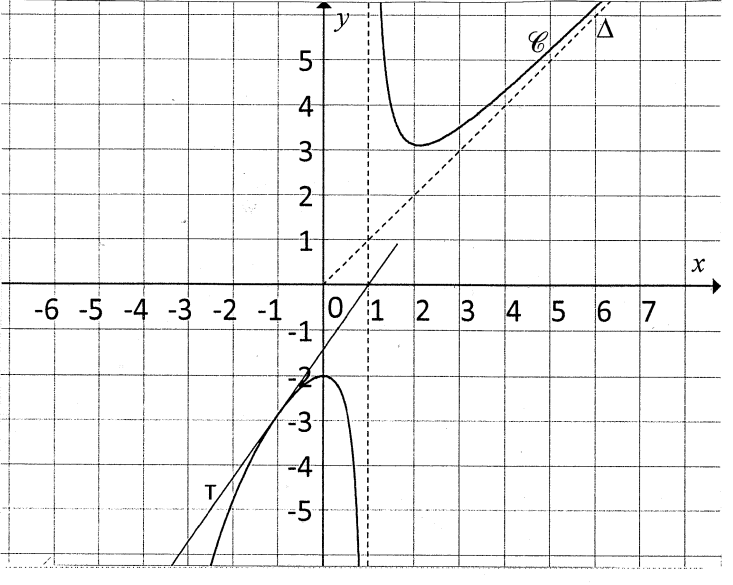
$$P_n = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2^0}} \times 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2^1}} \times \dots \times 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2^n}} = 2^{n+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^n}}$$

$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - xe^{-x}}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

$x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ متزايدة تماماً f
 $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$ متناقصة تماماً f

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	\ominus	$-$	$-$	\ominus	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	

A(20) $y = f'(\beta)(x-\beta) + f(\beta)$ (أ)
 $0 = \frac{\beta^2 - 2\beta - \beta e^{-\beta}}{(\beta-1)^2}(\alpha-\beta) + \beta + \frac{e^{-\beta} + 1}{\beta-1}$
 $-\beta^2 + 2\beta + \beta e^{-\beta} + e^{-\beta} + 1 + \beta = 0$
 $(\beta+1)(e^{-\beta} + 1) = 0$: لو، $\frac{\beta + \beta e^{-\beta} + e^{-\beta} + 1}{\beta-1} = 0$
 لو، $e^{-\beta} + 1 > 0$ و $\beta = -1$ لأن $(\beta+1)(e^{-\beta} + 1) = 0$
 $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = \frac{3+e}{4}(x+1) - \frac{3+e}{4} = \frac{3+e}{4}(x-1)$
 $f(\alpha) = \alpha + \frac{e^\alpha + 1}{\alpha-1}$: لو، $e^{-\alpha} = \alpha - 2$: لو، و $g(\alpha) = 0$: لو، $P(3)$
 $f(\alpha) = \alpha + \frac{\alpha - 2 + 1}{\alpha - 1} = \alpha + 1$
 $3 < f(\alpha) < 3.2$: لو، $3 < \alpha + 1 < 3.2$ و $2 < \alpha < 2.2$
 $f(-2) = -4.8$ (ب)



$f_p(x) - f_q(x) = x + \frac{e^{-x} + p}{x-1} - x - \frac{e^{-x} + q}{x-1}$ (P 4)
 $f_p(x) - f_q(x) = \frac{p-q}{x-1}$
 لو، $(p-q) < 0$ و لو، $p < q$ و لو،
 (ϵ_p) و لو، (ϵ_q) : لو، $x > 1$ و لو، (ϵ_p) : لو، $x < 1$ و لو،
 $(x-1)f'_m(x) + x(f_m(x)-1) = x^2$ (ب)
 $(x-1)(1 + \frac{-xe^{-x}-m}{(x-1)^2}) + x(x-1 + \frac{e^{-x}+m}{x-1}) = x^2$
 $x - 1 + \frac{-xe^{-x}-m}{x-1} - x + \frac{xe^{-x}+mx}{x-1} = 0$
 $-1 + \frac{m(x-1)}{x-1} = 0$
 "عد الطلب" $(m=1)$ و لو، $m-1=0$

$P_n = 2^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 2^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right) 2 \cdot 2^{-n} = 2^{n-1} + 2^{-n}$

تمرين 3

$Z = \frac{iz+5}{z+i} = \frac{i(x+iy)+5}{x+iy+i} = \frac{-y+5+ix}{x+i(y+1)}$ (1)
 $Z = \frac{(-y+5+ix)(x-i(y+1))}{(x+i(y+1))(x-i(y+1))} = \frac{6x}{x^2+(y+1)^2} + i \frac{x^2+y^2-4y-5}{x^2+(y+1)^2}$
 $(x,y) \neq (0,-1)$ و $6x=0$: لو، $x=0$: لو، E_1 مستقيم معادله $x=0$ و لو،
 $(x,y) \neq (0,-1)$ و $x^2+y^2-4y-5=0$: لو، E_2 دائرة مركزها $(0,2)$ و لو،
 $(0,-1)$ و نصف قطرها $r=3$ باستثناء النقطة $(0,-1)$.
 $|Z+i| = \left| \frac{iz+5}{z+i} + i \right| = \left| \frac{2iz+4}{z+i} \right| = 2 \left| \frac{iz+2}{z+i} \right|$ (4)
 $|iz+2| = |z+i|$: لو، $\left| \frac{iz+2}{z+i} \right| = 1$: لو، $|Z+i| = 2$: لو،

 $| -y+2+ix | = | x+i(y+1) |$
 $(-y+2)^2 + x^2 = x^2 + (y+1)^2$
 E_3 مستقيم $E_3: 6y=3$: لو، معادله $y = \frac{1}{2}$
 $\frac{iz+5}{z+i} = \bar{z}$: لو، $Z = \bar{z}$ (5)
 $z \cdot \bar{z} + i(\bar{z} - z) - 5 = 0$
 $(x-0)^2 + (y+1)^2 = 6$
 E_4 دائرة مركزها $(0,-1)$ و نصف قطرها $r = \sqrt{6}$

تمرين 4

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(x-2 - e^{-x})] = +\infty$ (I-1)
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(x-2 - e^{-x})] = +\infty$
 $g'(x) = (x-2 - e^{-x}) + (1+e^{-x})x = 2x-2+e^x(x-1)$
 $(e^{-x}+2) > 0$ و لو، $(x-1)$ إشارة $g'(x) = (x-1)(e^x+2)$

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	\ominus	\ominus	\ominus	$+$
$g(x)$	$+\infty$	0	$1 - \frac{1}{2}$	0	$+\infty$

 و لو، $g(0) = 0$ (3)
 و متزايدة، $g(2,2) \approx 0,2 > 0$ و لو،
 $g(2,1) \approx -0,05 < 0$ حسب مبرهنة
 القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$: لو،
 تقبل حل وحيد α حيث $2,1 < \alpha < 2,2$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ (P 1 II)
 (ع) يقبل مستقيم مقلوب معادله $x=1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{e^x+1}{x-1}\right) = +\infty$ (ب)
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + \frac{x(-\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}\right] = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x-1} = 0$ (ج)
 (د) يقبل مستقيم مقلوب معادله $y=x$ و لو،
 $f'(x) = 1 + \frac{-e^x(x-1) - e^x - 1}{(x-1)^2}$ (P 2)