موضوع تدريبي رقم ❸ لشعبة علوم

التمرين الأول (4ن):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=5$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{4}{5}u_n+\frac{1}{5}n+4$.

1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\leq n+20$.

2) بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-n-15$

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

بـ- أكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n=-10\left(\frac{4}{5}\right)^n+n+15$.

4) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n بحيث: $S_n=v_n+v_{n+1}+....+v_{2n}$ و $T_n=u_n+u_{n+1}+....+u_{2n}$.

التمرين الثاني (4ن):

يحوي صندوق على خمس كريات حمراء و أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات خضراء. (لايمكن التمييز بينها باللمس).

نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق.

1) نعتبر الأحداث التالية:

A: "سحب ثلاث كريات حمراء"

B: "سحب ثلاث كريات من نفس اللون"

C: "سحب كرية خضراء واحدة على الأقل"

أحسب: $P(A)$، $P(B)$ و $P(C)$.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب، عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس.

عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي

التمرين الثالث (5ن):

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $z^2-10z+34=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A، B و C النقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب: $z_A=2$ ، $z_B=5+3i$ و $z_C=\overline{z_B}$

1) أ- أكتب العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

بـ- إستنتج طبيعة المثلث ABC.

جـ- عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث: $z'=(1+i)z-2i$

أ- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

بـ- عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالتشابه المباشر S.

جـ- ما نوع الرباعي $ACBD$.

3) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$.

عيّن طبيعة (E) و عناصرها المميزة.

التمرين الرابع (7ن) :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-2+e^{-2x}-e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ ـ بيَن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x-2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

بـ ـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3) أ ـ بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=(1-e^{-x})(2e^{-x}+1)$.

بـ ـ أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم إستنتج اتجاه تغيَر الدالة f و شكَل جدول تغيَراتها .

4) بيَن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها .

5) بيَن أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α ، β حيث : $-0.9<\alpha<-0.8$ و $2.1<\beta<2.2$.

6) عيَن إحداثيي النقطة A من المنحنى (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (Δ) . أكتب معادلة لـ (T) .

7) أحسب $f(-1)$ ، ثم أنشئ كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) .

8) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=x-m$.

“ The only way to learn mathematics is to do mathematics ”

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2020

تصحيح مقترح للموضوع

تصحيح مقترح للتمرين الأول :

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}n + 4 \end{cases}$.

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq n+20$.

نسمي $P(n)$ الخاصية "من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq n+20$ "

- نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n=0$، لدينا $u_0 = 5$ و منه $u_0 \leq 0+20$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n \leq n+20$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \leq n+21$.

لدينا حسب الفرض $u_n \leq n+20$ و منه $\frac{4}{5}u_n \leq \frac{4}{5}n+16$ و منه $\frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}n \leq n+16$ أي $\frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}n + 4 \leq n+20$

أي $u_{n+1} \leq n+21$. و بالتالي $P(n+1)$ صحيحة.

- الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \leq n+20$.

2) تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}n + 4 - u_n = \left(\frac{4}{5} - 1\right)u_n + \frac{1}{5}n + 4 = -\frac{1}{5}(u_n - n - 20)$.

و لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \leq n+20$ و منه $u_n - n - 20 \leq 0$ و بالتالي : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - n - 15$

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) - 15 = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}n + 4 - n - 16 = \frac{4}{5}u_n - \frac{4}{5}n - 12 = \frac{4}{5}(u_n - n - 15) = \frac{4}{5}v_n.$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{4}{5}$ و حدها الأول : $v_0 = u_0 - 15 = -10$.

ب- كتابة v_n بدلالة n : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 \times q^n$ و منه $v_n = -10 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - n - 15$ و منه $u_n = v_n + n + 15$ أي : $u_n = -10\left(\frac{4}{5}\right)^n + n + 15$.

4) حساب المجاميع : بدلالة n المجموعين S_n و T_n بحيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{2n}$ و $T_n = u_n + u_{n+1} + ... + u_{2n}$.

من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_n + v_{n+1} + ... + v_{2n} = v_n\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = v_n = -50 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)$.

و $T_n = u_n + u_{n+1} + ... + u_{2n} = S_n + (n+1)\left(\frac{3}{2}n + 15\right)$.

تصحيح مقترح للتمرين الثاني :

عدد السحبات الممكنة : $C_{12}^3 = 220$.

1) حساب إحتمالات الأحداث :

$P(A) = \frac{C_5^3}{220} = \frac{10}{220}$ ، $P(B) = \frac{C_5^3 + C_4^3 + C_3^3}{220} = \frac{15}{220}$ و $P(C) = \frac{C_3^1 + C_3^2 + C_3^3}{220} = \frac{7}{220}$.

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ، عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس .

قيم المتغيّر العشوائي X هي : $X \in \{1;2;3;4\}$.

$P(X=1) = \frac{C_4^3}{220} = \frac{4}{220}$ ، $P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_8^1}{220} = \frac{48}{220}$ ، $P(X=3) = \frac{C_4^1 \times C_8^2}{220} = \frac{112}{220}$

$P(X=4) = \frac{C_8^3}{220} = \frac{56}{220}$

X_i	1	2	3	4
$P(X=X_i)$	$\frac{4}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{56}{220}$

حساب الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X:

$$E(X) = 1\times\frac{4}{220} + 2\times\frac{48}{220} + 3\times\frac{112}{220} + 4\times\frac{56}{220} = \frac{660}{220} = 3$$

تصحيح مقترح للتمرين الثالث :

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 - 10z + 34 = 0$.

لدينا : $\Delta = -36 = (6i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_1 = \frac{10-6i}{2} = 5-3i$ و $z_2 = \frac{10+6i}{2} = 5+3i$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C النقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A = 2$ ، $z_B = 5+3i$ و $z_C = \overline{z_B}$

1) أ- كتابة العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري و الشكل الأسي :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{5+3i-2}{5-3i-2} = \frac{3+3i}{3-3i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب- إستنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ يكافئ $\begin{cases} \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

و بالتالي المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين .

جـ- تعيين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

$$z_G = \frac{z_C + z_B + z_A}{3} = \frac{5-3i+5+3i+2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

2) S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث: $z'=(1+i)z-2i$

أ- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

لدينا: $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$ و زاوية له هي $\frac{\pi}{4}$ ، و مركزه النقطة اللاحقة $\frac{-2i}{1-(1+i)}=2$

أي أن مركز التشابه S هو النقطة A .

ب- تعيين z_D لا حقة النقطة D صورة النقطة B بالتشابه المباشر S .

$$z_D=(1+i)z_B-2i=(1+i)(5+3i)-2i=5+3i+5i-3-2i=2+6i$$

جـ- تحديد نوع الرباعي $ACBD$:

لدينا: $z_{\overrightarrow{AD}}=z_D-z_A=2+6i-2=6i$ و $z_{\overrightarrow{CB}}=z_B-z_C=5+3i-(5-3i)=6i$ و منه $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$.

و بالتالي الرباعي $ACBD$ متوازي أضلاع.

3) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$.

تحديد طبيعة (E) و عناصرها المميزة:

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ تكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=12$ أي $MG=4$ و بالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 4 .

تصحيح مقترح للتمرين الرابع :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-2+e^{-2x}-e^{-x}$

1) حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}\left(xe^{x}-2e^{x}+e^{-x}-1\right)=+\infty$.

2) أ- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\left(e^{-x}-1\right)=0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$:

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

لدينا: $f(x)-x-2=e^{-2x}-e^{-x}=e^{-x}\left(e^{-x}-1\right)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\left(e^{-x}-1\right)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	

المنحنى (C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $]-\infty;0]$.

المنحنى (C_f) يقع تحت (Δ) في المجال $[0;+\infty[$.

المنحنى (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $O(0;0)$

3) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=1-2e^{-2x}+e^{-x}=\left(1-e^{-x}\right)\left(2e^{-x}+1\right)$.

ب- إشارة $f'(x)$ من إشارة $\left(1-e^{-x}\right)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

اتجاه تغيّر الدالة f :

الدالة f متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;0]$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

4) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف مع تعيين إحداثييها :

الدالة f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=4e^{-2x}-e^{-x}=e^{-x}(4e^{-x}-1)$.

إشارة $f''(x)$ من إشارة $(4e^{-x}-1)$:

x	$-\infty$ $\ln 4$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$ 0 $-$

إذن النقطة $\omega\left(\ln 4;\ln 4-\frac{35}{16}\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

5) تبيان أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α ، β حيث : $-0.9<\alpha<-0.8$ و $2.1<\beta<2.2$.

• الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$ و $]-0.9;-0.8[\subset]-\infty;0[$ و $\begin{cases} f(-0.9)\approx 0,7 \\ f(-0.8)\approx -0,07\end{cases}$

أي $f(-0.9)\times f(-0.8)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]-\infty;0[$ حلا وحيدا α ، حيث $-0.9<\alpha<-0.8$.

• الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $]2.1;2.2[\subset]0;+\infty[$ و $\begin{cases} f(2.1)\approx -0,007 \\ f(2.2)\approx 0,10\end{cases}$

أي $f(2.1)\times f(2.2)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا β ، حيث $2,1<\beta<2,2$.

6) تعيين إحداثيي النقطة A من المنحنى (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (Δ) .

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f'(x)=1$.

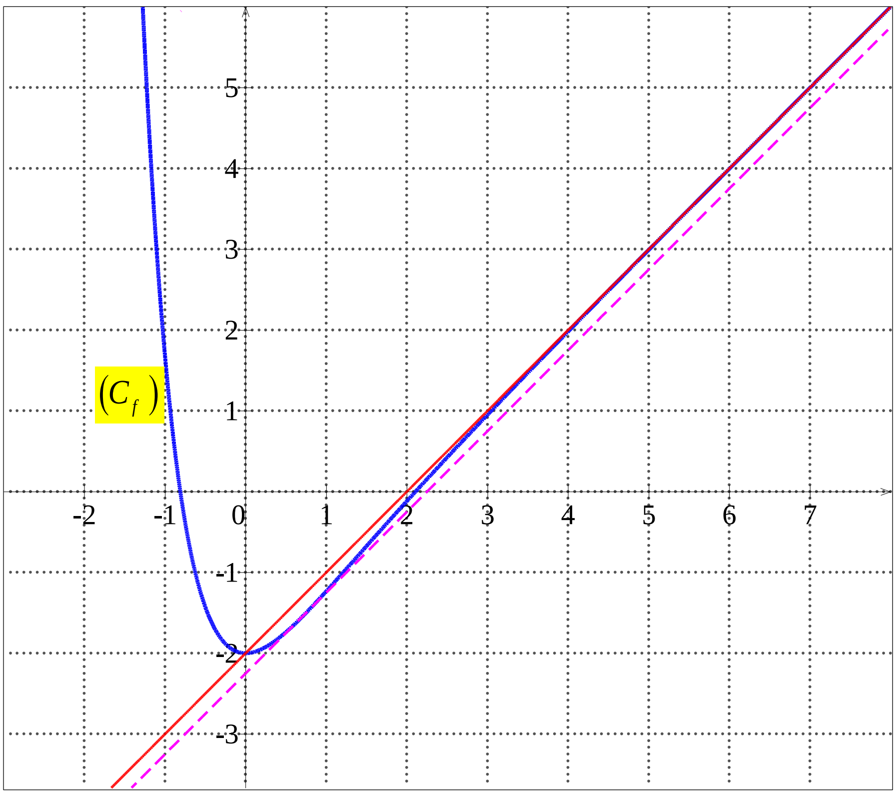
$f'(x)=1$ تكافئ $-2e^{-2x}+e^{-x}=0$ تكافئ $e^{-x}(-2e^{-x}+1)=0$ تكافئ $-2e^{-x}+1=0$ تكافئ $x=\ln 2$.

كتابة معادلة المماس (T) في النقطة $A\left(\ln 2;\ln 2-\frac{9}{4}\right)$:

لدينا : $(T): y=f'(\ln 2)(x-\ln 2)+f(\ln 2)$ و منه $(T): y=x-\frac{9}{4}$.

7) $f(-1)=e^2-e-3\approx 1.67$.

الرسم :



8) المناقشة البيانية :

حلول المعادلة $f(x) = x - m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y = x - m$.

إذا كان $m = \frac{9}{4}$ المعادلة تقبل حل واحد موجب.

إذا كان $m = 2$ المعادلة تقبل حل واحد معدوم .

إذا كان $m \in \left]2;\frac{9}{4}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين .

إذا كان $m \in \left]\frac{9}{4};+\infty\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

إذا كان $m \in \left]-\infty;2\right[$ فإن المعادلة تقبل حل واحد سالب .

إنجاز : خالد بخاخشة

بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2020