المؤسسة الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) — دورة: أوت 2020

الشعبة: علوم تجريبية — إعداد: عبد المطلب

بكالوريا تجريبي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 3سا و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأوّل $u_1 = 0$ ومن أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$، $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 2}{n+1}$.

1- احسب الحدود: u_2، u_3 و u_4.

2- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n < 2$.

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما، واستنتج أنّها متقاربة.

3- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = n(a - u_n)$، حيث $a \in \mathbb{R} - \{2\}$.

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية حسابية أساسها $(a-2)$، يطلب تعيين حدها الأول v_1.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n و a، استنتج عبارة u_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

جـ) احسب بدلالة n و a المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

4- ليكن المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n$. بيّن أنّ $S'_n = n(n-1)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على ست كريات بيضاء تحمل الرقم 1 وأربع كريات سوداء تحمل الرقم a، حيث a عدد طبيعي أكبر تماما من 1. نسحب ثلاث كريات في آن واحد بطريقة عشوائية.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة.

1- عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم بيّن أنّ الأمل الرياضياتي $E(X) = \dfrac{9+6a}{5}$.

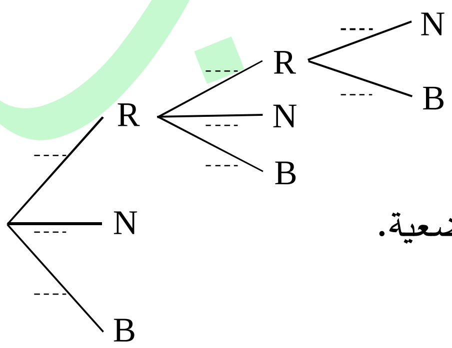
2- عيّن قيمة للمتغيّر العشوائي X بحيث $[E(X)]^2 = 9E(X)$.

3- نضيف إلى الكيس السابق كريتين حمراوين، ثم نسحب منه كرية واحدة. إذا كانت بيضاء نربح، وإذا كانت سوداء نخسر، أما إذا كانت حمراء فنسحب كرة أخرى من الكيس دون إرجاع الكرة الحمراء وهكذا...

نسمي الحادثة B: سحب كرة بيضاء.

نسمي الحادثة N: سحب كرة سوداء.

نسمي الحادثة R: سحب كرة حمراء.



أ) أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تنمذج هذه الوضعية.

ب) احسب الاحتمال p_1 للربح واستنتج الاحتمال p_2 للخسارة.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I- 1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2-4z+8=0$.

2- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ الجملة التالية: $\begin{cases}2z_1+\overline{z_2}=6\\ \overline{z_1}+z_2=3+i\end{cases}$.

II- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A، B ، C و D من هذا المستوي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=2i$ ، $z_B=3+i$ ، $z_C=2-2i$ و $z_D=\overline{z_C}$.

1- بيّن أنّ $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$. استنتج طبيعة المثلث ABC، ثم مثّله.

2- بيّن أنّ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$، ثم استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر S يطلب تعيين خصائصه.

3- بيّن أنّ العبارة المركبة للتشابه S الذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ هي: $z'=(1-i)z-2$.

4- بيّن أنّ: من أجل كل عدد مركب z، $z'-z=-i(z-2i)$. استنتج طبيعة المثلث AMM'.

5- بيّن أنّ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقّق $OM'=OM$ هي دائرة $(\mathscr{C})$، مركزها D وتشمل A.

6- لتكن النقطة I منتصف القطعة [CD]. بيّن أنّ المجموعة (E) للنقط M من هذا المستوي التي تحقّق: $\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=2\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MA}\|$ هي صورة الدائرة $(\mathscr{C})$ بالتشابه المباشر S. مثّل $(\mathscr{C})$ والمجموعة (E).

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $\begin{cases}f(x)=(x^2-2x)(\ln x-2)+x & x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$)

1- أ) احسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)}{x}$.

ب) هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين؟ فسّر النتيجة بيانيا.

2- أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ فإنّ $f'(x)=(x-1)(2\ln x-3)$. استنتج إشارة $f'(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3- أ) (Δ) مستقيم معادلته $y=x$. بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقطع المستقيم (Δ) عند ثلاث نقاط يطلب تعيينها.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ).

4- أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $3{,}1<\alpha<3{,}2$ و $5{,}5<\beta<5{,}6$.

ب) ارسم المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

جـ) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x)=f(m)$ حلين متمايزين.

5- g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\left(x^2-2|x|\right)\left(2-\ln|x|\right)-|x|$ لما $x\neq 0$، و $g(0)=0$.

أ) بيّن أنّ الدالة g زوجية، ثم تأكّد أنّه من أجل كل من المجال $[0;+\infty[$ فإنّ: $g(x)=-f(x)$.

ب) اشرح كيفية رسم البيان $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة g ثم ارسم البيان $(\mathscr{C}')$.

انتهى الموضوع الأول

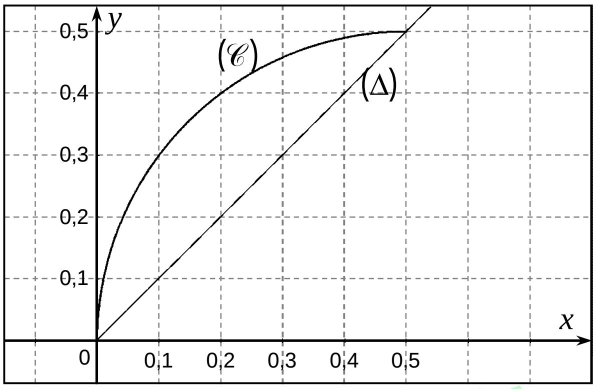
الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، نعتبر المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$، والمنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f المعرّفة على المجال $[0;0,5]$ بـ: $f(x)=\sqrt{-x^2+x}$. في الشكل أسفله التمثيل لكل من المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

1- بيّن أنّ الدالة f متزايدة على المجال $[0;0,5]$.

2- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=0,1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.



أ) مثّل على حامل محور الفواصل في الوثيقة المرفقة، الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها، مبرزا خطوط الرسم.

ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3- أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_n\le 0,5$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

جـ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

4- (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{2}{2u_n+3}$، بيّن أنّ (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقطة A من هذا المستوي لاحقتها $z_A=3+3i$ ، ولتكن النقطة B صورة النقطة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\dfrac{\pi}{3}$.

1- أ) بيّن أنّ $\dfrac{z_B}{z_A}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$، ثم استنتج طبيعة المثلث AOB.

ب) مثّل النقطة A واستنتج تمثيل النقطة B. (حساب z_B غير مطلوب)

2- أ) اكتب على الشكل الأسي العددين المركبين z_A و z_B .

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب z_B، واستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

جـ) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n=-1$.

3- أ) بيّن أنّ لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل $roror$ هي $z_C=-z_A$.

ب) بيّن أنّ النقط A، B و C تنتمي إلى الدائرة $(\mathscr{C})$ يطلب تعيين عناصرها المميزة.

جـ) استنتج طبيعة المثلث ABC. أنشئ الدائرة $(\mathscr{C})$ والمثلث ABC.

4- عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي التي تحقّق $\arg\left(\dfrac{z+z_C}{z-z_C}\right)^2=\pi+2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

زهرة نرد حمراء مكعبة أوجهها تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6. زهرة نرد خضراء مكعبة أوجهها تحمل الأرقام 0، 0، 1، 1، 2، 2. نرمي النردين في آن واحد ونسجل الرقمين الظاهرين. جميع الأوجه لها نفس حظوظ الظهور.

1- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية مجموع الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين.

عيّن قانون الاحتمال للمتغير X، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ والتباين $V(X)$.

2- نضع هذين النردين في كيس ونسحب منه عشوائيا نردا واحدا ثم نرميه مرتين متتاليتين. نسمي الحوادث التالية:

الحادثة A: النرد المسحوب أحمر. الحادثة B: النرد المسحوب أخضر. الحادثة C: الرقمين الظاهرين زوجيين.

أنشئ شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية، ثم احسب الاحتمالات التالية: $P(\text{A}\cap\text{C})$، $P(\text{C})$ و $P_{\text{C}}(\text{A})$.

(في كل التمرين، تُعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}g(x)$، وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}g(x)=0$ (ضع $t=-\dfrac{1}{x}$).

2- أثبت أنّ: من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}^*$، $g'(x)=\left(\dfrac{-2x+1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا $-1{,}5<a<-1{,}4$. استنتج أنّ $g(x)-1\geq 0$ لما $a\leq x<0$.

II- نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+1+e^{-\frac{1}{x}}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد $(\text{O};\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}f(x)$، فسّر بيانيا النتيجة الأخيرة.

2- بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=-x+2$. بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقع أعلى (Δ) لما $x<0$.

3- أ) أثبت أنّ: من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=g(x)-1$. استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات f.

ب) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

4- أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا b حيث $1{,}5<b<1{,}6$، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

ب) بيّن أنّ $f(a)=a^2-a+1$ واستنتج حصرا للعدد $f(a)$.

جـ) ارسم (Δ)، $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=f(-x)$. نأخذ $f(a)\approx 4{,}4$.

5- (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1+e^{-\frac{1}{u_n}}$.

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $b<u_n\leq 2$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n). استنتج أنّها متقاربة ثم احسب نهايتها.

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح البكالوريا التجريبي 2020 موضوع 1

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) $u_2 = \frac{u_1+2}{2} = 1$ ، $u_3 = \frac{2u_2+2}{3} = \frac{4}{3}$ و $u_4 = \frac{3}{2}$

2) أ) $u_n < 2$: $n=0$ ، $u_1 = 0$ ومنه $u_1 < 2$ (محققة)

نفرض أن $u_n < 2$ ونبرهن $u_{n+1} < 2$. لدينا: $u_n < 2$

$nu_n < 2n$ ، $nu_n + 2 < 2n+2$ ، $\frac{nu_n+2}{n+1} < \frac{2n+2}{n+1}$

$u_{n+1} < 2$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n < 2$.

ب) $u_{n+1} - u_n = \frac{nu_n+2}{n+1} - u_n = \frac{nu_n+2-nu_n-u_n}{n+1} = \frac{2-u_n}{n+1}$

لدينا: $u_n < 2$ ، $-u_n > -2$ ؛ $2-u_n > 0$ ومنه:

$u_{n+1} - u_n > 0$ ، إذن (u_n) متزايدة.

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) أ) $v_{n+1} = (n+1)(a-u_{n+1}) = (n+1)\left(a - \frac{nu_n+2}{n+1}\right)$

$v_{n+1} = (n+1)\left(\frac{an+a-nu_n-2}{n+1}\right) = an+a-nu_n-2$

$v_{n+1} - v_n = an+a-nu_n-2-(na-nu_n) = a-2$

ومنه: (v_n) متتالية حسابية: $r = a-2$ و $v_1 = a$.

ب) $v_n = v_1 + (n-1)r = a+(n-1)(a-2) = (a-2)n+2$

$v_n = n(a-u_n)$ ومنه: $u_n = a - \frac{v_n}{n}$

الحد العام: $u_n = a - \frac{(a-2)n+2}{n} = 2 - \frac{2}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2 - \overset{0}{\frac{2}{n}}\right) = 2$

جـ) $S_n = \frac{n}{2}(v_1+v_n) = \frac{n}{2}(a+(a-2)n+2) = \frac{n}{2}[(a-2)n+a+2]$

4) لدينا: $u_n = 2 - \frac{2}{n}$

$S'_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$

$S'_n = (2-\frac{2}{1}) + 2(2-\frac{2}{2}) + 3(2-\frac{2}{3}) + \dots + n(2-\frac{2}{n})$

$S'_n = (2-2) + (2\times2-2) + (3\times2-2) + \dots + 2n-2$

$S'_n = 2(1+2+3+\dots+n) - 2-2-2+\dots-2$

$S'_n = 2\frac{n(n+1)}{2} - 2n = n^2+n-2n = n^2-n$

يمكن حساب مجموع متتالية حسابية حدها العام nu_n .

تمرين 2:

1) $X = \{3 ; 2+a ; 1+2a ; 3a\}$

$P(X=3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$

$P(X=2+a) = \frac{C_6^2 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$

$P(X=1+2a) = \frac{C_6^1 \times C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$

$P(X=3a) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$

$E(X) = 3\times\frac{1}{6} + (2+a)(\frac{1}{2}) + (1+2a)(\frac{3}{10}) + 3a\times\frac{1}{30}$

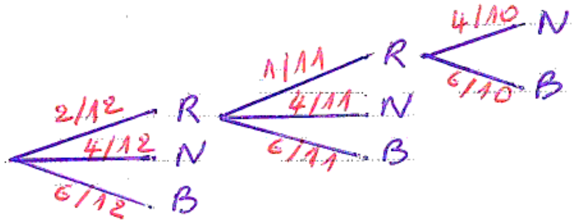
$E(X) = \frac{6a+9}{5}$

2) $[E(X)]^2 - 9E(X) = 0$ أي: $E(X)[E(X)-9] = 0$

$E(X) = 0$ (مستحيل) أو $E(X) = 9$ ومنه:

$\frac{9+6a}{5} = 9$ ومنه: $a = 6$

3) أ)



ب) $P_1 = \frac{6}{12} + \frac{2}{12}\times\frac{6}{11} + \frac{2}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$

$P_2 = 1 - P_1 = \frac{2}{5} = 0,4$

تمرين 3:

I - 1) $z^2 - 4z + 8 = 0$

$\Delta = -16 = 16i^2 = (4i)^2$

$z_1 = 2-2i$ و $z_2 = 2+2i$ (مترافقين)

2) $\begin{cases} 2z_1 + \overline{z_2} = 6 \\ \overline{z_1} + z_2 = 3+i \end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases} 2\overline{z_1} + z_2 = 6 \\ \overline{z_1} + z_2 = 3+i \end{cases}$

بالطرح: $\overline{z_1} = 3-i$ ومنه: $z_1 = 3+i$

$z_2 = 6 - 2\overline{z_1}$ ومنه: $z_2 = 2i$

II - 1) $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-1-3i}{-3+i} = \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\frac{|z_C - z_B|}{|z_A - z_B|} = \frac{BC}{BA} = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

2) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2-4i}{3-i} = 1-i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

$z_C - z_A = \sqrt{2}e^{i(-\pi/4)}(z_B - z_A)$

ولدينا: $z' - w = re^{i\theta}(z - w)$

ومنه: C هي صورة B بالتشابه المباشر S ، الذي مركزه A ، نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$.

3) $z' = az + b$ ، حيث: b هو لاحقة المركز A :

$a = \sqrt{2}(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4}) = 1-i$ و $\frac{b}{1-a} = z_A$

أي $b = -2$ ومنه: $z' = (1-i)z - 2$

4) $z' = (1-i)z - 2$ أي: $z' = z - iz - 2$

$z' - z = -iz - 2$ ومنه: $z' - z = -i(z-2i)$

$\frac{z'-z}{z-2i} = \frac{z'-z}{z-z_A} = -i = e^{i(-\pi/2)}$

$\frac{|z'-z|}{|z-z_A|} = \frac{MM'}{AM} = 1$ و $\arg\left(\frac{z'-z}{z-z_A}\right) = (\vec{AM}, \vec{MM'}) = -\frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث AMM' مثلث قائم ومتساوي الساقين

5) $OM' = OM$ تكافئ $|z'| = |z|$

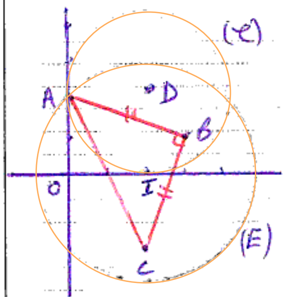
$|(1-i)z - 2| = |z|$

$|(1-i)(x+iy) - 2| = |x+iy|$

$|(x+y-2) + i(-x+y)| = |x+iy|$

$\sqrt{(x+y-2)^2 + (y-x)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$ ، دائرة مركزها $D(2,2)$ ونصف قطرها $DA=2$ ، (C) هي الدائرة التي مركزها D وتشمل A أي نصف قطرها $r=DA=2$



6) $z_I=\frac{z_C+z_D}{2}=2$

صورة D بالتحويل S :

$z'=(1-i)z_D-2=2=z_I$

وبما أن A صامدة، منه صورة الدائرة (C) هي الدائرة التي مركزها I وتشمل A أي نصف قطرها $IA=\sqrt{2}\,AD=2\sqrt{2}$

$\|\vec{MC}+\vec{MD}\|=2\|\vec{MI}-\vec{MA}\|$

$\|\vec{MI}+\vec{IC}+\vec{MI}+\vec{ID}\|=2\|\vec{AM}+\vec{MI}\|$

$\|2\vec{MI}+\underbrace{\vec{IC}+\vec{ID}}_{\vec{0}}\|=2\|\vec{AI}\|$

$MI=AI$

(E) هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $r=AI=2\sqrt{2}$.

تمرين 4 :

1) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x(x-2)(\ln x-2)+x]=+\infty$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}[(x-2)(\ln x-2)+1]}{\cancel{x}}=+\infty$

ب) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين. (C) يقبل نصف مماس عمودي (يوازي y'oy)

2) أ) $f'(x)=(2x-2)(\ln x-2)+\frac{1}{x}(x^2-2x)+1$

$f'(x)=2(x-1)(\ln x-2)+(x-1)=(x-1)(2\ln x-3)$

$f'(x)=0$ لما $x=1$ أو $\ln x=\frac{3}{2}$ أي $x=e^{3/2}$.

x	0		1		$e^{3/2}$	
		+	0	−	0	+

ب) $1\leqslant x\leqslant e^{3/2}$: f متناقصة

$x\in]0;1[\cup]e^{3/2};+\infty[$ f متزايدة.

x	0		1		$e^{3/2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	3	↘	−1,1	↗	$+\infty$

3) أ) $f(x)=x$ يعني: $x(x-2)(\ln x-2)=0$

$A(0,0)$ ، $B(2;2)$ و $C(e^2,e^2)$

ب) لدراسة وضعية (C) بالنسبة لـ(Δ)، ندرس إشارة $(f(x)-x)$

x	0		2		e^2		$+\infty$
$x-2$		−	0	+		+	
$\ln x-2$		−		−	0	+	
$f(x)-x$	0	+	0	−	0	+	

(C) أعلى (Δ) لما $x\in]0,2[\cup]e^2,+\infty[$

(C) أسفل (Δ) لما $x\in]2,e^2[$

(C) يقطع (Δ) عند A ، B و C المذكورة سابقا ،

4) أ) f مستمرة ومتناقصة على المجال $]3,1;3,2[$.

$f(3,1)\simeq 0,138>0$ و $f(3,2)\simeq -0,014<0$

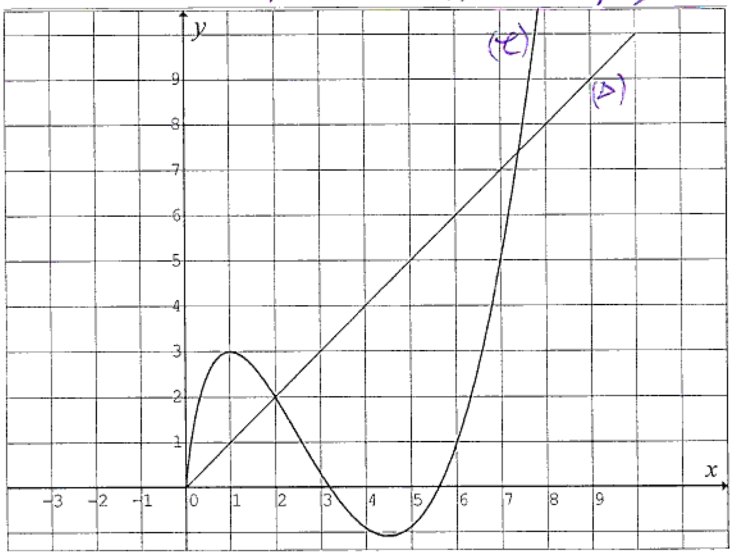
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,1<\alpha<3,2$.

f مستمرة ومتزايدة على المجال $]5,5;5,6[$:

$f(5,5)\simeq -0,184<0$ و $f(5,6)\simeq 0,011>0$

ومنه حسب القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $5,5<\beta<5,6$.

ب) رسم المنحنى (C) والمستقيم (Δ) .



جـ) $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين

لما: $f(e^{3/2})<f(m)<0$ ومنه: $\alpha<m<\beta$

$m\neq e^{3/2}$

5) أ) $g(-x)=((-x)^2-2|-x|)(2-\ln|-x|)-|-x|$

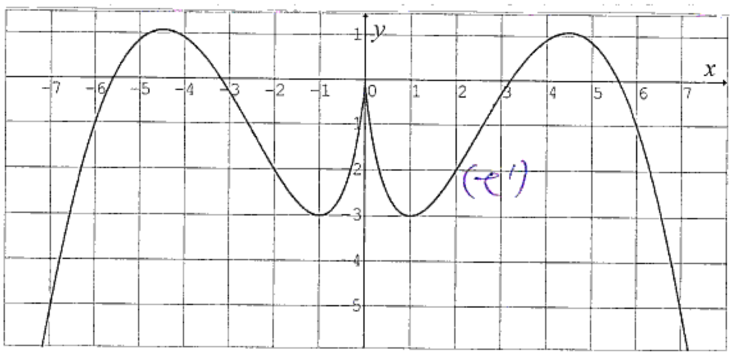
$g(-x)=(x^2-2|x|)(2-\ln|x|)-|x|=g(x)$

ومنه g زوجية .

لما $x\geqslant 0$ ، $|x|=x$ ومنه: $g(x)=(x^2-2x)(2-\ln x)-x$

$g(x)=-[(x^2-2x)(\ln x-2)+x]=-f(x)$

ب) لما $x\geqslant 0$: $g(x)=-f(x)$ ومنه (C') نظير (C) بالنسبة لمحور الفواصل ولما $x<0$ ، بما أن g زوجية، فإن (C') يقبل كمحور تناظر حامل محور التراتيب



تتمة : باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أن: $\int_1^{e^2}(x^2-2x)(\ln x-2)\,dx=\frac{9e^4-2e^6-31}{18}$ ثم احسب المساحة A للحيز المستوي المحدد بـ(C) والمستقيمات $y=x$ ، $x=1$ و $x=e^2$.

نضع: $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=\frac{x^3}{3}-x^2\end{cases}$ $\begin{cases}u(x)=\ln x-2\\ v'(x)=x^2-2x\end{cases}$

$\int_1^{e^2}(x^2-2x)(\ln x-2)\,dx=\left[(\ln x-2)\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\left(\frac{x^2}{3}-x\right)dx$

$=\left[(\ln x-2)\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right]_1^{e^2}-\left[\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{2}\right]_1^{e^2}=\frac{9e^4-2e^6-31}{18}$

$A=\int_1^{e^2}(x-f(x))\,dx=-\int_1^{e^2}(x^2-2x)(\ln x-2)\,dx\simeq 19,25\ u.a$

تصحيح البكالوريا التجريبي 2020م موضوع 4

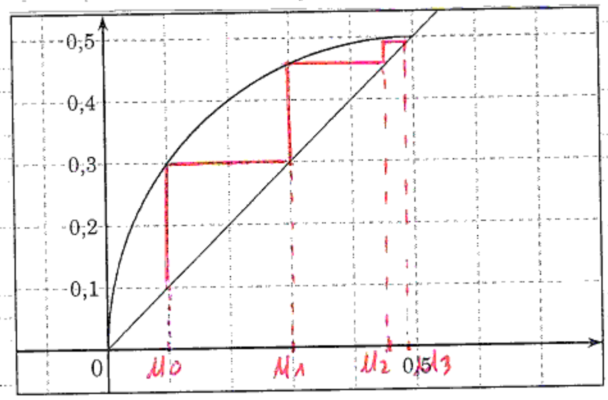
تمرين 1:

1) $f(x)=\sqrt{-x^2+x}$ ومنه: $f'(x)=\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}} \geq 0$

لأن: لما $0 \leq x \leq 0{,}5$ ، $-1 \leq -2x \leq 0$ ، $0 \leq -2x+1 \leq 1$

إذن f متزايدة على $[0\,;0{,}5]$.

2) أ)



ب) (u_n) متزايدة لأن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ، ومتقاربة نحو $0{,}5$.

3) أ) $0 \leq u_n \leq 0{,}5$. $n=0$: $u_0 = 0{,}1$ (محققة)

نفرض أن $0 \leq u_n \leq 0{,}5$ ، ونبرهن $0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}5$

لدينا: $0 \leq u_n \leq 0{,}5$ وبما أن f متزايدة فإن $f(0) \leq f(u_n) \leq f(0{,}5)$ ، أي $0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}5$ ،

ومنه $0 \leq u_n \leq 0{,}5$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

ب) $u_{n+1}-u_n = \dfrac{\left(\sqrt{-u_n^2+u_n}-u_n\right)\left(\sqrt{-u_n^2+u_n}+u_n\right)}{\left(\sqrt{-u_n^2+u_n}+u_n\right)}$

$u_{n+1}-u_n = \dfrac{u_n(-2u_n+1)}{\sqrt{-u_n^2+u_n}+u_n} \geq 0$ لأن: لما $0 \leq u_n \leq 0{,}5$ ، $0 \leq -2u_n+1 \leq 1$

ومنه (u_n) متزايدة

جـ) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ومنه $\sqrt{-\ell^2+\ell}=\ell$

بالتربيع: $2\ell^2-\ell=0$. إما $\ell=0$ (مرفوض) لأنها متزايدة أو $\ell=\frac{1}{2}$

4) لنبين أن (V_n) متناقصة: لدينا: $u_{n+1} \geq u_n$

$2u_{n+1} \geq 2u_n$ ، $2u_{n+1}+3 \geq 2u_n+3$ ومنه $\dfrac{1}{2u_{n+1}+3} \leq \dfrac{1}{2u_n+3}$

$\dfrac{2}{2u_{n+1}+3} \leq \dfrac{2}{2u_n+3}$ يعني $V_{n+1} \leq V_n$ ومنه (V_n) متناقصة

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{2u_n+3} = \dfrac{1}{2}$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ ،

(u_n) متزايدة و (V_n) متناقصة ولهما نفس النهاية إذن متجاورتان

تمرين 2:

1) أ) العبارة المركبة للدوران r: $z'-w=e^{i\theta}(z-w)$

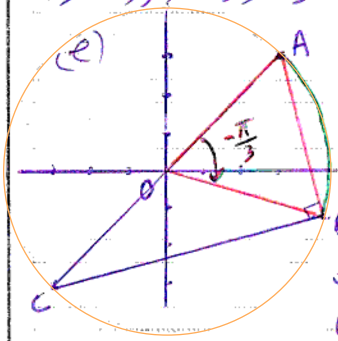
بما أن B هي صورة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ إذن: $z_B - z_O = e^{i(-\frac{\pi}{3})}(z_A - z_O)$ ومنه:

$z_B = e^{i(-\frac{\pi}{3})} z_A$ أي: $z_B / z_A = e^{i(-\frac{\pi}{3})}$

$\dfrac{|z_B|}{|z_A|} = \dfrac{OB}{OA} = 1$ و $\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = -\dfrac{\pi}{3}$

ومنه المثلث ABO متقايس الأضلاع.

ب) B هي صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$



2) أ) $z_A = 3\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_B = e^{i(-\frac{\pi}{3})} \times z_A$

$= e^{i(-\frac{\pi}{3})} \times 3\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

ومنه: $z_B = 3\sqrt{2}\, e^{i(\frac{-\pi}{12})}$

أو: $\arg(z_B) = (\vec{u};\overrightarrow{OB}) = (\vec{u},\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{12}$

و $|z_B| = OB = OA$

ب) $z_B = (3+3i)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{3+3\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{3-3\sqrt{3}}{2}$

$z_B = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12}\right)$

$\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \dfrac{3+3\sqrt{3}}{2\times 3\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) = -\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{3-3\sqrt{3}}{2\times 3\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

ومنه: $\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

جـ) $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$ و $-1 = e^{i\pi}$

ومنه: $\dfrac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi$ ؛ $n = 3+6k$ $(k \in \mathbb{N})$

3) أ) $r\circ r$: $z' = e^{i(-\frac{\pi}{3})} \times e^{i(-\frac{\pi}{3})} z = e^{i(-\frac{2\pi}{3})} z$

$r\circ r\circ r$: $z' = e^{i(-2\pi/3)} \times e^{i(-\frac{\pi}{3})} z = e^{i(-\pi)} z$

ومنه: $z_C = e^{i\pi} z_A = -z_A$

ب) $OA = OB = OC$ ؛ دائرة مركزها O و $r = 3\sqrt{2}$.

جـ) بما أن C نظيرة A بالنسبة لـ O ، فإن $[AC]$ هو قطر الدائرة، إذن المثلث ABC قائم في B.

4) $z_C = -z_A$ ومنه: $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right)^2 = \pi + 2k\pi$

$2\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right) = \pi + 2k\pi$ ومنه $\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

(Γ) هي دائرة قطرها $[AC]$ ماعدا A و C.

تمرين 3:

1) قيم المتغير العشوائي X هي: $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

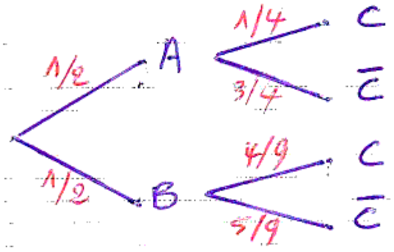
	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

$E(X) = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$

$V(X) = \dfrac{143}{6} - \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 = \dfrac{43}{12}$

(2



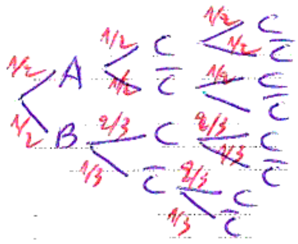
$P(A\cap C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$

$P(A\cap C)=\frac{1}{8}$

$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)=\frac{1}{8}+\frac{2}{9}=\frac{25}{72}$

$P_C(A)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{1/8}{25/72}=\frac{9}{25}$

يمكن استعمال الشجرة التالية :



تمرين 4:

I - 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ لأن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} e^{-1/x}=1$

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} g(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} e^{-1/x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim\limits_{t\to-\infty} t^2e^t=0$

2) $g'(x)=\frac{-2}{x^3}e^{-1/x}+\frac{1}{x^2}e^{-1/x}\frac{1}{x^2}=e^{-1/x}\left(\frac{-2x+1}{x^4}\right)$

x	$-\infty$		a		0		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	‖	+	0	−	
$g(x)$	0	↗	1	↗ $+\infty$	‖	0 ↗	$4e^{-2}$	↘	0

3) g مستمرة ومتزايدة على $]-1{,}5\,;-1{,}4[$.

$g(-1{,}5)\simeq 0{,}87<1$ و $g(-1{,}4)\simeq 1{,}04>1$ ، ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة: $g(x)=1$ تقبل حلا وحيدا

من جدول التغيرات لما $a\leqslant x<0$ فإن $g(x)\geqslant 1$.

II - 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} e^{-1/x}=0$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)=+\infty$

$x=0$ مستقيم مقارب لـ $(\mathscr{C})$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x-2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-1/x}-1\right)=0$

كذلك عند $-\infty$ ، ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathscr{C})$.

$(\mathscr{C})$ فوق (Δ) لما $f(x)-y>0$ أي $e^{-1/x}-1>0$

$e^{-1/x}>1$ ، $\frac{-1}{x}>0$ ، $\frac{1}{x}<0$ ومنه $x<0$.

3) أ) $f'(x)=-1+\frac{1}{x^2}e^{-1/x}=g(x)-1$

لما $a\leqslant x<0$ ، $f'(x)\geqslant 0$

ولما $x\in]-\infty\,;a[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ ، $f'(x)<0$.

x	$-\infty$		a		0		b		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	‖		−		
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(a)$	↗ $+\infty$	‖	1	↘ 0	↘	$-\infty$

ب) $f''(x)=g'(x)=\left(\frac{-2x+1}{x^4}\right)e^{-1/x}$ (الانعطاف)

تنعدم وتغير إشارتها. النقطة هي $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}+e^{-2}\right)$

4) أ) f مستمرة ومتناقصة على $]1{,}5\,;1{,}6[$ ،

$f(1{,}5)\simeq 0{,}01>0$ و $f(1{,}6)\simeq -0{,}06<0$ ، ومنه

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا.

$f(x)\leqslant 0$ لما $x\geqslant b$ و $f(x)>0$ لما $x\in]-\infty,0[\,\cup\,]0\,;b[$.

ب) لدينا $g(a)=1$ أي $\frac{1}{a^2}e^{-1/a}=1$ ومنه: $e^{-1/a}=a^2$

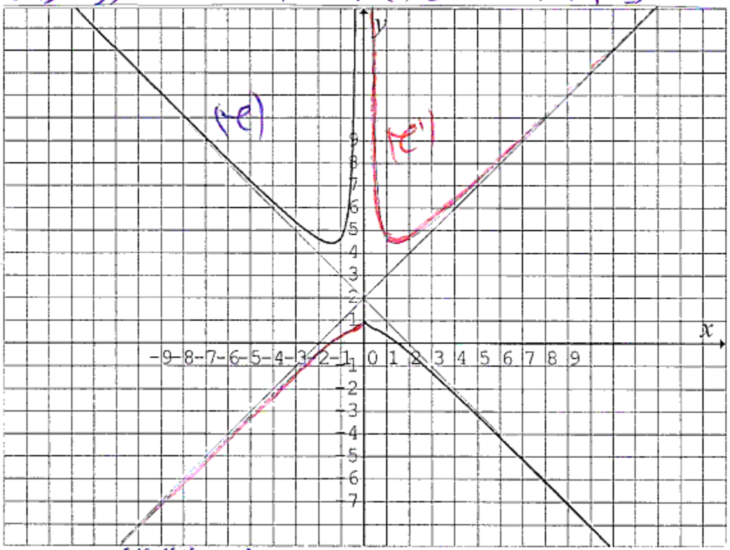
إذن $f(a)=-a+1+e^{-1/a}=-a+1+a^2$

$-1{,}5<a<-1{,}4$ ، $1{,}4<-a<1{,}5$ ، $1{,}96<a^2<2{,}25$

$3{,}36<a^2-a<3{,}75$ ومنه: $4{,}36<a^2-a+1<4{,}75$

$4{,}36<f(a)<4{,}75$

جـ) رسم $(\mathscr{C}')$ نناظر $(\mathscr{C})$ بالنسبة لحامل محور التراتيب



5) أ) $n=0$: $u_0=2$ $b<u_0\leqslant 2$ (محققة)

نفرض أن $b<u_n\leqslant 2$ ونبرهن $b<u_{n+1}\leqslant 2$.

$b<u_n\leqslant 2$ ، $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{u_n}<\frac{1}{b}$ ؛ $-\frac{1}{b}<\frac{-1}{u_n}\leqslant-\frac{1}{2}$

$e^{-1/b}<e^{-1/u_n}\leqslant e^{-1/2}$ ، $e^{-1/b}+1<1+e^{-1/u_n}\leqslant 1+e^{-1/2}$

لدينا: $1+e^{-1/2}<2$ و $f(b)=0$ ومنه: $b<u_{n+1}\leqslant 2$

إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $b<u_n\leqslant 2$.

ب) $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$ ولدينا لما $x>b$ فإن $f(x)<0$

ومنه: لما $b<u_n\leqslant 2$ فإن $f(u_n)<0$.

إذن (u_n) متناقصة تماما

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$\lim\limits_{+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{+\infty}u_n=\ell$ أي $f(\ell)=0$ ومنه $\ell=b$

تتمة:

1) بين أن: من أجل كل $x<-2$ ، $-x+2<f(x)<-x+3$

2) لتكن A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ $(\mathscr{C})$ و المستقيمات: $y=0$ ، $x=-3$ و $x=-2$ بين أن

$4{,}5<A<5{,}5$

1) سابقا لما $x<0$: $f(x)>-x+2$

لبيان أن $f(x)<-x+3$ أي $-x+1+e^{-1/x}+x-3<0$ أي $e^{-1/x}-2<0$. لدينا: $x<-2$ ، $\frac{1}{x}>-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$ ، $e^{-1/x}<e^{1/2}$ ومنه $e^{-1/x}-2<e^{1/2}-2<0$

2) لدينا $f(x)>0$ لما $x<0$: $A=\int_{-3}^{-2}f(x)\,dx$

و $-x+2<f(x)<-x+3$ ومنه:

$\int(-x+2)\,dx<\int f(x)\,dx<\int(-x+3)\,dx$

$\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-3}^{-2}<A<\left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{-2}$ ومنه $4{,}5<A<5{,}5$