الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للإمتحان والمسابقات
باكالوريا تجريبي لمدرسة أشبال الأمة
الشعبة: علوم تجريبية

دورة: 2020

إختبــار البكالوريا التجريبية في مادة : الرياضيات المدة : 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

يحتوي الموضوع الأول على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 6 إلى الصفحة 3 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 2} \end{cases}$

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $1 \le u_n < 2$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . هل هي متقاربة؟

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 1 - 2u_n$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب كتابة عبارة حدها العام v_n بدلالة n .

ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم جد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

جـ) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \cdots + \dfrac{1}{u_n}$

4) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $|u_{n+1} - 2| \le \dfrac{2}{3}|u_n - 2|$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $|u_{n+1} - 2| \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ؛ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي الصندوق U_1 على أربع كريات سوداء وكريتين بيضاوين و ثلاث كريات سوداء، لا نفرق بينها باللمس ،نسحب عشوائيا ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة إلى الصندوق.

1) أحسب احتمال الحوادث التالية : A : "سحب ثلاث كريات من نفس اللّون" ، B : "سحب كرية سوداء على الأقل" ، C : "سحب كريتين حمراوين و واحدة بيضاء"

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المحصل عليها.

أ) حدد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

3) نعتبر صندوقا آخرا U_2 يحتوي على كريتين سوداوين وكرية حمراء واحدة . نضع الكريات المسحوبة من الصندوق U_1 في الصندوق U_2 ، ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين من الصندوق U_2 .

– أحسب احتمال أن تكون الكريتان المسحوبتان من U_2 سوداوين ، علما أن الكرات الثلاثة المسحوبة من U_1 لها نفس اللون

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I. حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة : $\begin{cases} 2\alpha + i\beta = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)\alpha - \beta = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$ حيث α و β عددان مركبان .

II. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد اولمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ؛ نعتبر النقط A ، B و E من المستوي ذات اللواحق : $z_A = 1 - i$ ؛ $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ و $z_C = \sqrt{3}i$

1) أ) أكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسي .

ب) بين أن العدد : $\frac{z_A}{z_B} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد z_B

2) أ) عين z_D لاحقة النقطة D صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$.

ب) نعتبر (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$\arg(z^2 + 3) = \arg(z + i\sqrt{3}) + 2k\pi$ ، (مع $k \in \mathbb{Z}$).

– بين أنه يمكن كتابة علاقة المجموعة (γ) على الشكل $\arg(z - z_E) = 2k\pi$ ، ثم استنتج طبيعة المجموعة (γ) .

3) نعتبر النقطة C ذات اللاحقة $z_C = 1 + i$ ، عين طبيعة المثلث ABC .

4) ليكن S التحويل النقطي المعرف كما يلي : $S = r \circ h$ (يرمز بـ $\circ$ تركيب التحويلين r و h) حيث h التحاكي الذي مركزه O ونسبته -2 .

أ) عين طبيعة التحويل S مبرزا عناصره المميزة .

ب) ليكن التحويل النقطي R_6 المعرف بـ $R_6 = \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{6}$.

– عين طبيعة التحويل R_6 مع تحديد عناصره المميزة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على : $\mathbb{R}^*$ بـ : $g(x) = x^2 - \ln(x^2)$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، و شكل جدول تغيراتها.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون : $g(x) > O$.

II) f دالّة معرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{2}{(x)} + x + \frac{\ln(x^2)}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) أحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا.

2) أ) بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ يكون : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x)^2}$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

ب) برهن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) ذو المعادلة $y = x$ ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

3) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن : $-x \in \mathbb{R}^*$ و $f(x) + f(-x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة بيانيا .

ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.3 < \alpha < 0.4$ ، ثم استنتج أنها تقبل حلا آخرا β يطلب تعيين حصر له.

4) أ) بين أن ابمنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما .

ب) أنشئ كلا من : (T_1) ، (T_2) ، (Δ) و المنحنى (C_f).

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ بالعبارة

$h(x) = \left[\dfrac{\ln((x+1)^2)}{x+1} + (x+1) + \dfrac{2}{x+1}\right] + 2$ ، وليكن (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

– بين أنه يوجد تحويل نقطي يحول المنحنى (C_f) إلى المنحنى (C_h) (الإنشاء غير مطلوب)

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني :

يحتوي الموضوع الثاني على (03) صفحات (من الصفحة 4 من 6 إلى الصفحة 6 من 6)

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. $P(z)$ كثير حدود للمتغير الغير معدوم z حيث: $P(z) = z^3 + (4\sqrt{3})z^2 + 24z + 24\sqrt{3}$.

أ) أحسب $P(-2\sqrt{3})$ ، ماذا تستنتج؟

ب) أوجد العددين a و b بحيث يكون $P(z) = (z + 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$ ؛ ثم حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$.

—

II. المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد اولمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ؛ A ، B ، C النقط التي لواحقها على الترتيب:
$z_A = -2\sqrt{3}$ ؛ $z_B = -\sqrt{3} + 3i$ ؛ $z_C = -\sqrt{3} - 3i$.

1) أ) أكتب كلا من z_A ؛ z_B و z_C على الشكل الأسي.

ب) بيَن أنّ : $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{1441} + \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{2020}$.

2) أ) أكتب العدد $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ على الشكل الجبري.

ب) أعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ، ثم حدد طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.

أ) عيَن العبارة المركبة للدوران R ، واستنتج أن صورة A بالدوران R هي B.

ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة B بالدوران R ، أكتب z_D على الشكل الجبري.

4) (Γ) الدائرة التي قطرها $[CD]$.

أ) تحقق أن O هي مركز الدائرة (Γ).

ب) بين أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ) ، واستنتج طبيعة كل من المثلثين CAD و CBD

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ u_{n+1} = \frac{eu_n - 1}{2} \end{cases}$ ، e أساس اللوغاريتم النيبيري.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n \leq \frac{1}{e-2}$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2u_n + \frac{2}{2-e}$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب كتابة عبارة حدها العام v_n بدلالة n .

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{e-2}\left[1-\left(\frac{e}{2}\right)^{n-1}\right]$.

جـ) أحسب نهاية المتتالية (u_n) ماذا تستنتج؟

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

أ) عبر عن S_n بدلالة n.

ب) أحسب بدلالة n المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر زهرتي نرد كل منهما مرقم من 1 إلى 6 ، زهري النرد متطابقان في المظهر لكن أحدهما مزيف والآخر غير مزيف ، احتمال ظهور الرقم 6 بالنسبة للمزيف يساوي $\frac{1}{3}$

1) نرمي زهرة النرد الغير مزيفة 3 مرات على التوالي ونرمز بـ X للمتغير العشوائي الذي يهتم بعدد المرات التي نحصل فيها على الرقم 6.

أ) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) تحقق أن $p(X=2) = \frac{5}{72}$

جـ) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

2) نختار عشوائيا أحد زهري النرد ، ثم نرمي زهرة النرد المختارة ثلاث مرات على التوالي ، نعتبر الحادثتين A و B حيث :
A : "الحصول على رقم 6 مرتين بالضبط " ؛ B : "زهر النرد المختار هو زهر النرد الغير مزيف"

أ) مستعينا بشجرة الاحتمالات أحسب $p(A \cup B)$ ، $p(A \cup \bar{B})$ ، ثم استنتج أن $p(A) = \frac{7}{48}$.

ب) تحصلنا على الرقم 6 مرتين بالضبط. مااحتمال أن يكون زهر النرد المختار مزيفا.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) g دالة عددية معرفة على : $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1-(x^2-2x+2)e^{-x}$.

1) أدرس تغيرات $g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، و تحقق أن $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$.

3) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f دالة معرَفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x-1+(x^2+2)e^{-x}$ ؛ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (**الوحدة** $2cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

3) أ) برهن أن $f(\alpha) = \alpha(1+2e^{-\alpha})$.

أ) باستعمال حصر العدد α عين حصرا لـ $f(\alpha)$.

4) برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة (Δ).

5) أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

6) أنشئ (Δ) ، (T) ثم المنحنى (C_f).

انتهى الموضوع الثاني