

المدة: 3 ساعات ونصف سا	اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات	القسم: 3 ع تجريبية
------------------------	---------------------------------------	--------------------

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نطا)

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $U_0 = 11$ و $U_{n+1} = 2 + \sqrt{U_n - 2}$

- 1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $3 \leq U_n \leq 11$
- 2- أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $U_{n+1} - U_n = (\sqrt{U_n - 2})(1 - \sqrt{U_n - 2})$
ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة و برر تقاربها .

3- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 \leq U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(U_n - 3)$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n - 3 \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

4- لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي: $V_n = \ln(U_n - 2)$

أ) برهن أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و يطلب تعيين حدها الأول V_0 .

ب) أكتب عبارة الحد العام لـ (V_n) ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n .

5- احسب المجموع S حيث: $S = V_{1440} + V_{1441} + \dots + V_{2019}$

ثم استنتج الجداء: $P = (U_{1440} - 2)(U_{1441} - 2) \dots (U_{2019} - 2)$

التمرين الثاني (04 نطا)

يحتوي كيس على ثماني كرات لا يمكن التمييز بينهما باللمس وتحمل الأرقام التالية: 0، 0، 1، 2، 2، 2، 2، 4 .
نسحب عشوائيا وفي أن واحد ثلاث كرات من الكيس :

(1) نعتبر الحدثين :

A : من بين الكرات المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل رقم 0 .

B : جداء الأرقام التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 8 .

أ) بين أن: $P(A) = \frac{5}{14}$ وأن $P(B) = \frac{1}{7}$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء الأرقام التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة

أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج) احسب الأمل الرياضياتي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

التمرين الثالث : (05.5 نقطة)

في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق على الترتيب :

$$z_C = 2 \text{ و } z_B = -1 - i\sqrt{3} \text{ ، } z_A = -1 + i\sqrt{3}$$

(1-1) اكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ على الشكل الأسي .

(ب) استنتج طبيعة المثلث ABC .

(ج) عين Ω و r مركز ونصف قطر الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .

(2-1) عين طبيعة وعناصر المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ بحيث : $z\bar{z} + 2(z + \bar{z}) = 0$

(ب) تحقق أن النقطتان A و B تنتميان إلى المجموعة (Γ) .

(3-1) ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

(أ) عين صورة النقطة B بالدوران R .

(ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

(ج) عين صورة النقطة Ω بالدوران R ثم استنتج مما سبق صورة المجموعة (Γ) بالدوران R .

(د) عين طبيعة (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث : $z = z_\Omega + ke^{\frac{i\pi}{4}}$ و k عدد حقيقي

ثم جد معادلة ديكارتية لـ (Δ) .

التمرين الرابع : (06.5 نقطة)

f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) بين أنه لأجل كل $x \in D_f$ فان : $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

(3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

(5) بين المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 < \alpha < 1,9$

(6) أكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

(7) بين أنه لأجل كل $x \in D_f$ فان : $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$

ثم استنتج أن : (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

(8) أحسب $f(0)$; $f(3)$ ثم أرسم كلامن (Δ) و (T) و (C_f)

(9) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x^2 + 1)e^{-(x+m)+1} = 1$

الموضوع الثاني :

التمرين الأول (04نقطة)

1. f دالة معرفة على المجال $[2, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[2, +\infty[$

2. (u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = \frac{5}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) برهن بالتراجع انه من اجل كل n من \mathbb{N} فإن $2 < u_n < 3$ ثم استنتج انه من اجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$

(2) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

(3) تحقق انه من اجل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(u_n - 2)$

(4) اثبت انه من اجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثاني (05نقطة)

يعرض متجر تخفيضات هامة أثناء بيع جزء من مدخراته للأحذية التي تشمل ثلاثة أنواع A ، B و C .
في المتجر يوجد ربع المدخرات من النوع A وخمسها من النوع B أما البقية من النوع C ، 24% من السلعة A و 75% من السلعة B و 20% من السلعة C كلها مخفضة الأثمان .
اشترى زيون من المتجر حذاء بطريقة عشوائية ، نعتبر الأحداث التالية :

S : الحذاء الذي اشتراه الزيون من السلعة المخفضة . A : الحذاء الذي اشتراه الزيون من السلعة A .

B : الحذاء الذي اشتراه الزيون من السلعة B . C : الحذاء الذي اشتراه الزيون من السلعة C .

(1) أحسب الاحتمالات $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$.

(2) قدم شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية ثم بين أن : $P(S) = \frac{8}{25}$.

(3) استنتج احتمال أن يكون الحذاء من النوع B علما أنه من السلعة المخفضة .

(4) نختار بطريقة عشوائية على التوالي مع إرجاع 3 أحذية .

أحسب احتمال الحدث D : الحصول على حذاء واحد فقط من السلعة المخفضة .

(5) نختار بطريقة عشوائية على التوالي مع إرجاع n حذاء .

نعتبر E الحدث : الحصول على الأقل على حذاء واحد من بين n حذاء من السلعة المخفضة .

(أ) بين أن : $P(E) = 1 - \left(\frac{17}{25}\right)^n$

(ب) عين أصغر قيمة لـ n حتى يكون $P(E) \geq 0.999$

التمرين الثالث (05نقطة)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة : $(z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق :

$$z_D = \bar{z}_C \text{ و } z_C = 3 + 2i\sqrt{3} \text{ ، } z_B = \bar{z}_A \text{ ، } z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(أ) بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي لنفس الدائرة ذات المركز النقطة Ω حيث : $z_\Omega = 3$ يطلب تعيين نصف قطرها

$$(b) \text{ بين أن : } z_A = \left(\frac{z_D - 1}{4}\right)^{1439} + \left(\frac{z_C - 1}{4}\right)^{2018}$$

(3) لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة للمبدأ O .

(أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث BEC

(ب) بين وجود دوران r مركزه النقطة B ويحول E إلى C يطلب تعيين زاويته .

(4) S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ من المستوي حيث :

$$z' = (1 - i\sqrt{3})z + 3$$

(أ) عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S .

(ب) (δ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $|iz - 3i| = |-3 + i\sqrt{3}|$ ،

عين المجموعة (δ) ثم أوجد صورة (δ) بالتحويل S

(ج) عين المجموعة (φ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $Arg\left(\frac{z}{z}\right) = 2\pi k$ مع $z \neq 0$ و k عدد صحيح نسبي .

التمرين الرابع (06 نقاط)

i. ا. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \ln x + \frac{x-2}{x}$.

(1) احسب نهايات الدالة g عند 0 و $+\infty$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,4 < \alpha < 1,5$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

ii. f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = 1 + (x-2)\ln x$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$ ثم فسر النهاية عند 0 هندسيا .

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول التغيرات .

(3) بين أن : $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$ ثم أعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من اجل $\alpha = 1,45$

(4) (T_{x_0}) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة M_0 ذات الفاصلة x_0 .

(أ) اكتب المعادلة الديكارتيّة للمماس (T_{x_0}) .

(ب) عين x_0 إذا علمت أن المماس (T_{x_0}) يمر بالنقطة $A(2; 0)$.

(ت) استنتج أن (C_f) يقبل مماسين يمران بالنقطة A ثم اكتب معادلة كل منهما .

(5) ارسم كلا من المماسين والمنحنى (C_f) .

iii. نعتبر المستقيم (D_m) ذو المعادلة $y = mx - 2m$ حيث m وسيط حقيقي .

(1) تحقق أن (D_m) يمر بالنقطة A .

(2) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - 2m$.