ثانوية محمود بن محمود/ قالمة — السنة الدراسية : 2020/2019

المادة : رياضيات — المستوى : 3 ع تج – المدة : 2 سا

اختبـــار الثلاثـــي الثانـــــي

التمرين الأول : (07 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_1 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n + n - 1}{2n}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq 1$.

2) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$ واحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

3) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-n)(u_n - 1)}{2n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟

4) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{n}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) عبر عن v_n بدلالة n .

5) احسب المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

6) احسب المجموع : $S'_n = \ln(u_1 - 1) + \ln(u_2 - 1) + \cdots + \ln(u_n - 1)$.

التمرين الثاني : (06 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 قريصات لا نفرق بينها باللمس ، منها أربع قريصات بيضاء تحمل الرقم 0 وثلاث قريصات حمراء تحمل الرقم 7 و قريصتان بيضاوان تحملان الرقم 2 وقريصة حمراء تحمل الرقم 5 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 4 قريصات من هذا الصندوق .

نعتبر الحوادث الآتية :

A "جميع القريصات تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى"

B "نستطيع تشكيل العدد 2000 أرقاما"

C "جميع القريصات بيضاء"

D "جميع القريصات من نفس اللون ".

E "على الأقل توجد قريصة رقمها يختلف عن باقي أرقام القريصات الأخرى".

1) أ) بين أن $P(B)=\frac{4}{105}$.

ب) احسب : $P(A)$ ، $P(C)$ ، $P(D)$ و $P(E)$.

ج) نفرض أن الحادثة C محققة ، احسب احتمال الحادثة B .

2) نعتبر القيم النقدية الآتية الموافقة لسحب 4 كريات بالطريقة السابقة حيث :

- تشكيل العدد 5000 يوافقه 75 دينارا.
- تشكيل العدد 7000 يوافقه 50 دينارا.
- تشكيل العدد 2000 يوافقه 20 دينارا.
- تشكيل العدد 0000 يوافقه 25 دينارا بقيمة سالبة.
- بقية الحالات توافقها 5 دنانير بقيمة سالبة.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي القيمة النقدية الموافقة للسحبة.

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-2z+4=0$.

حيث z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب.

ب) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

ج) استنتج حلول المعادلة : $(i\bar{z}+2-i)^2-2(i\bar{z}+2-i)+4=0$.

د) عين طويلة وعمدة العددين المركبين ${z_1}^2$ و ${z_2}^2$ ثم استنتج الشكل الجبري لـ ${z_1}^2$ و ${z_2}^2$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$.

A ، B ، A' و B' أربع نقط من المستوي لواحقها : $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ ، $z_{A'}=-2+2i\sqrt{3}$ و $z_{B'}=-2-2i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) احسب $z_{\overrightarrow{AB}}$ و $z_{\overrightarrow{A'B'}}$ لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ على الترتيب ، ماذا تستنتج؟

ب) احسب $z_{\overrightarrow{AA'}}$ و $z_{\overrightarrow{BB'}}$ لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$ على الترتيب ، ماذا تستنتج؟

ج) ما طبيعة الرباعي $AA'BB'$ ؟

د) اكتب : $\frac{z_{A'}-z_A}{z_{B'}-z_B}$ على الشكل المثلثي واستنتج طبيعة المثلث $AA'B'$.

انتهى الموضوع

عرض حال لاختبار الثلاثي الثاني

3 ع تج

التمرين الأول : [redacted]

1) نضع $P(n): U_n \geq 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

- من أجل $n=1$: $U_1 = 2 > 1$

ومنه $P(1)$ صحيحة

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ أي أن : $U_n \geq 1$

- ونبرهن صحة $P(n+1)$ ، أي أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} \geq 1$

لدينا : $U_n \geq 1$

$$(n+1)U_n \geq n+1$$

$$(n+1)U_n + n-1 \geq n+1+n-1$$

$$(n+1)U_n + n-1 \geq 2n$$

$$\frac{(n+1)U_n + n-1}{2n} \geq \frac{2n}{2n}$$

$$U_{n+1} \geq 1$$

$P(n+1)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة أي أن : $U_n \geq 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

2) نضع : $P(n): U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

- من أجل $n=1$: $U_1 = 1+1 = 2$

ومنه $P(1)$ صحيحة.

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

أي أن : $U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$

- ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي :

$U_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا : $U_{n+1} = \frac{(n+1)U_n + n-1}{2n}$

$$= \frac{(n+1)\left[n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1\right] + n-1}{2n}$$

$$= \frac{n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2n} + 1$$

$$= \frac{(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2} + 1$$

$$= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 1$$

$P(n+1)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة أي أن : $U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

- حساب $\lim_{n \to +\infty} U_n$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1\right)$$

$$= \lim \left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 1\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(2n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 1\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(2\,\frac{n}{2^n} + 1\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(2 \times \frac{n}{e^{\ln 2^n}} + 1\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(2 \times \frac{\ln 2}{\ln 2} \times \frac{n}{e^{n \ln 2}} + 1\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{\ln 2} \times \frac{n \ln 2}{e^{n \ln 2}} + 1\right) = 1$$

لأن $\frac{n \ln 2}{e^{n \ln 2}} = \frac{1}{\frac{e^{n \ln 2}}{n \ln 2}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

لأن $\frac{e^{n \ln 2}}{n \ln 2} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$ (التزايد المقارن)

(3 $U_{n+1}-U_n = \frac{(n+1)U_n+n-1}{2n} - U_n$

$$= \frac{nU_n+U_n+n-1-2nU_n}{2n}$$

$$= \frac{U_n-nU_n+n-1}{2n}$$

$$= \frac{(1-n)U_n-(1-n)}{2n}$$

$$= \frac{(1-n)(U_n-1)}{2n}$$

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

$$U_{n+1}-U_n = \frac{(1-n)(U_n-1)}{2n}$$

$2n>0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$، إذن اشارة الفرق هي اشارة البسط.

لدينا حسب السؤال (1) : $U_n\geq 1$ ومنه $U_n-1\geq 0$

و $1-n\leq 0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$

إذن $U_{n+1}-U_n\leq 0$

من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ ومنه (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$.

- الاستنتاج :

بما أن $U_n\geq 1$ (محدودة من الأسفل) ومتناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$ فهي متقاربة (تتقارب نحو 1)

(4 أ* $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{U_{n+1}-1}{n+1}}{\frac{U_n-1}{n}}$

$$= \frac{U_{n+1}-1}{n+1}\times\frac{n}{U_n-1}$$

$$= \frac{\frac{(n+1)U_n+n-1}{2n}-1}{n+1}\times\frac{n}{U_n-1}$$

$$= \frac{\frac{(n+1)U_n+n-1-2n}{2n}}{n+1}\times\frac{n}{U_n-1}$$

$$= \frac{(n+1)U_n-n-1}{2n(n+1)}\times\frac{n}{U_n-1}$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}U_n-\cancel{(n+1)}}{2\cancel{n}\cancel{(n+1)}}\times\frac{\cancel{n}}{U_n-1}$$

$$= \frac{U_n-1}{2(U_n-1)} = \frac{1}{2}$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_1=\frac{U_1-1}{1}=1$

ب* التعبير عن V_n بدلالة n :

$$V_n = V_1\times q^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(5 $S_n = V_1+V_2+\dots+V_n$

$$= V_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

(6 $S'_n = \ln(U_1-1)+\ln(U_2-2)+\dots+\ln(U_n-1)$

$$= \ln(1V_1+1-1)+\ln(2V_2+1-1)+\dots+\ln(nV_n+1-1)$$

$$= \ln(1V_1)+\ln(2V_2)+\dots+\ln(nV_n)$$

$$= \ln(1)+\ln(V_1)+\ln(2)+\ln(V_2)+\dots+\ln(n)+\ln(V_n)$$

$$= \ln(1)+\ln(2)+\dots+\ln(n)+\ln(V_1)+\ln(V_2)+\dots+\ln(V_n)$$

$$= \ln(1\times2\times3\times\dots\times n)+\ln(V_1\times V_2\times\dots\times V_n)$$

$$= \ln(n!)+\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\dots\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

[redacted]

$= \ln(n!) + \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1+\cdots+(n-1)}\right)$

$= \ln(n!) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}(n-1)}$

التمرين الثاني :

1) عدد الحالات = الطلبة الممكنة هو $C_{10}^{4} = 210$

أ* $P(B) = \dfrac{C_2^1 \times C_4^3}{210} = \dfrac{4}{105}$

$P(A) = \dfrac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{210} = \dfrac{56}{210} = \dfrac{28}{105}$

$\frac{24}{\ }$ $\frac{4}{35}$

$P(C) = \dfrac{C_6^4}{210} = \dfrac{15}{210} = \dfrac{1}{14}$

$P(D) = \dfrac{C_6^4 + C_4^4}{210} = \dfrac{15+1}{210} = \dfrac{16}{210} = \dfrac{8}{105}$

ـ حساب $P(E)$:

لدينا الحادثة $\bar{E}$ " لا توجد أي قريصة رقمها يختلف عن باقي أرقام القريصات الأخرى "

$P(\bar{E}) = \dfrac{C_4^4}{210} = \dfrac{1}{210}$

ومنه $P(E) = 1 - \dfrac{1}{210} = \dfrac{209}{210}$

ج* $P_C(B) = \dfrac{P(C \cap B)}{P(C)} = \dfrac{P(B)}{P(C)}$

$= \dfrac{8}{15}$

2) $X = \{-5 ; -25 ; +20 ; +50 ; +75\}$

$P(X=-25) = \dfrac{C_4^4}{C_{10}^4} = \dfrac{1}{210}$

$P(X=20) = \dfrac{C_4^3 \times C_2^1}{210} = \dfrac{8}{210}$

$P(X=50) = \dfrac{C_4^3 \times C_3^1}{210} = \dfrac{12}{210}$

$P(X=75) = \dfrac{C_4^3 \times C_1^1}{210} = \dfrac{4}{210}$

$P(X=-5) = 1 - \left(\frac{1}{210} + \frac{8}{210} + \frac{12}{210} + \frac{4}{210}\right)$

$= 1 - \dfrac{25}{210} = \dfrac{185}{210}$

ومنه .

$X = x_i$	-5	-25	20	50	75
$P(X=x_i)$	$\frac{185}{210}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{8}{210}$	$\frac{12}{210}$	$\frac{4}{210}$

ـ حساب الأمل الرياضياتي :

$E(X) = (-5) \times \frac{185}{210} - 25 \times \frac{1}{210} + 20 \times \frac{8}{210}$

$+ 50 \times \frac{12}{210} + 75 \times \frac{4}{210} = \frac{11}{21}$

التمرين الثالث :

1) أ* $Z^2 - 2Z + 4 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 = 12i^2$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}\, i$

$Z_1 = \dfrac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}\, i$

$Z_2 = \dfrac{2 - 2\sqrt{3}\, i}{2} = 1 - \sqrt{3}\, i$

$S = \{1 - \sqrt{3}i ; 1 + \sqrt{3}i\}$

ب*

$Z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

$Z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

ج* بوضع $i\bar{Z} + 2 - i = X$

نخرج المعادلة من الشكل : $X^2 - 2X - 4 = 0$

ب)
$z_{\overrightarrow{AA'}} = z_{A'} - z_A = -3 + \sqrt{3}i$

$z_{\overrightarrow{BB'}} = z_{B'} - z_B = -3 - \sqrt{3}i$

الشعاعان $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$ غير مرتبطان خطيا.

جـ) الرباعي $AA'BB'$ شبه منحرف.

د)
$$\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A} = \frac{-3+\sqrt{3}i}{-3-3\sqrt{3}i} \times \frac{-3+3\sqrt{3}i}{-3+3\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{9 - 9\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i - 9}{36} = \frac{-12\sqrt{3}i}{36}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{3}i$$

$$\left|\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\arg\left(\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) = \frac{-\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ومنه:
$$\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$

+ استنتاج طبيعة المثلث $AA'B'$:

$$\left|\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A}\right| = \frac{AA'}{AB'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ومنه: $AA' = \frac{\sqrt{3}}{3}AB'$

$$\arg\left(\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB'}; \overrightarrow{AA'}) = \frac{-\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ومنه $AA'B'$ مثلث قائم في A.

ومنه:
$x = 1 + \sqrt{3}i$

+ لـ y:
$$i\bar{z} + 2 - i = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\bar{z} = \frac{1+\sqrt{3}i - 2 + i}{i} = \frac{-1 + (1+\sqrt{3})i}{i}$$

$$\bar{z} = \frac{-1 + (1+\sqrt{3})i}{i}\left(\frac{-i}{-i}\right) = i + 1 + \sqrt{3}$$

ومنه: $z = 1 + \sqrt{3} - i$

و $x = 1 - \sqrt{3}i$

y':
$$i\bar{z} + 2 - i = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\bar{z} = \frac{1 - \sqrt{3}i - 2 + i}{i} = \frac{-1 + (1-\sqrt{3})i}{i}$$

$$\bar{z} = \frac{-1 + (1-\sqrt{3})i}{i}\left(\frac{-i}{-i}\right) = i + 1 - \sqrt{3}$$

ومنه: $z = 1 - \sqrt{3} - i$

$$S = \{1 - \sqrt{3} - i ; 1 + \sqrt{3} - i\}$$

ب) لدينا: $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ ومنه: $z_1^2 = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}$

إذن $|z_1^2| = 4$ و $\arg(z_1^2) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

و $z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ ومنه: $z_2^2 = 4e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

إذن: $|z_2^2| = 4$ و $\arg(z_2^2) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

لدينا:
$$z_1^2 = 4e^{\frac{2\pi}{3}i} = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1^2 = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_1^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

و
$$z_2^2 = 4e^{-\frac{2\pi}{3}i} = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_2^2 = 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

(2) أ)
$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -2\sqrt{3}i$$

$$z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{B'} - z_{A'} = -2 - 2i\sqrt{3} + 2 - 2i\sqrt{3} = -4\sqrt{3}i$$

نلاحظ أن $z_{\overrightarrow{A'B'}} = 2z_{\overrightarrow{AB}}$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ مرتبطان خطيا.