

التمرين الأول: (03 نقاط)

نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) الموجبة تماما و المعرفة على \mathbb{N}^* حيث: $\begin{cases} \ln(u_3) - \ln(u_4) = -1 \\ \ln(u_3) + \ln(u_4) = 5 \end{cases}$

(1) عين q أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول.

(2) استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = e^{n-1}$; ثم احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n+1}$.

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي: $v_n = \ln(u_{n+1}) - 2\ln(u_n)$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(ب) احسب S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$; ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\ln(S_n) = 0$.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

I. (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $z^2 - 6z + 13 = 0$.

(2) احسب العددين المركبين z_1 و z_2 اللذين يحققان الجملة التالية: $\begin{cases} 3z_1 + (1-i)z_2 = 13 \\ 4\bar{z}_1 - (1+i)\bar{z}_2 = 1-7i \end{cases}$

II. في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C لواحقتها (على الترتيب):

$$z_A = 2 + i ; z_B = 3 - 2i ; z_C = 5 + 2i$$

(1) أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) احسب $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)^{2020}$ ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

(3) (أ) عين (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\left|\frac{z-3+2i}{z-5-2i}\right| = 1$

(ب) تحقق أن النقط A تنتمي إلى (Γ_1) .

(4) (أ) عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $\arg\left(\frac{z-5-2i}{z-3+2i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)،

(ب) تحقق أن النقط A تنتمي إلى (Γ_2) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاثة أزهار نرد متوازنة، اثنان خضراوان وفيهما ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6. أما الثالث فلونه أحمر وفيه وجهان يحملان الرقم 1 و أربعة أوجه تحمل الرقم 6.

نسحب من الصندوق بصفة عشوائية زهر نرد ثم نرميه و نسجل الرقم الظاهر. نعتبر الحوادث:

V : "زهر النرد المسحوب أخضر" ؛ R : "زهر النرد المسحوب أحمر" ؛ S : "الرقم الظاهر هو 6".

(1) (أ) أنشئ شجرة احتمالات مناسبة للوضعية؛ ثم احسب احتمال الحادثة S .

(ب) بعد رمي زهر النرد كان الرقم الظاهر هو 6، ما هو احتمال أن يكون زهر النرد المرئي أحمر؟

2) تقوم الآن بسحب زهر نرد من الصندوق ثم نرميه n مرة متتابة و نسجل في كل مرة الرقم الظاهر.

نعتبر الحادثة S_n : "الرقم الظاهر في الرمية n هو 6".

(أ) أنشئ شجرة احتمالات مناسبة للوضعية في حالة $n = 2$.

(ب) احسب الحادثة G_2 : "الرقم الظاهر في الرميتين الاثنتين هو 6".

(ج) نعتبر الحادثة G_n : "الرقم الظاهر في n رمية هو 6".

- احسب بدلالة n الاحتمالين $P_R(G_n)$ و $P_V(G_n)$.

(د) استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $P(G_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(هـ) نرمز بـ p_n لاحتمال أن يكون زهر النرد المسحوب أحمرًا علماً أن الرقم الظاهر في n رمية هو 6.

- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$; ثم احسب نهاية p_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

(و) احسب أصغر عدد طبيعي n_0 حيث يكون $p_n \geq 0,999$ من أجل كل $n \geq n_0$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = e^{x-1} - 2x + 2$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) > 0$.

II. f دالة معرفة على \mathbb{R} حيث: $f(x) = \frac{2x}{e^{x-1}} + x - 1$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 1]$ ، ماذا تستنتج؟

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-1}}$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f''(x) = \frac{2x-4}{e^{x-1}}$.

(ب) ادرس على \mathbb{R} إشارة $f''(x)$. ماذا تستنتج؟

(4) أ) بين أنه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f) معامل توجيهه 1 و اكتب معادلة له.

(ب) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f) .

(5) ناقش بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) - x = m$.

انتهى