

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الشعبة : علوم تجريبية
دورة ماي 2021



ثانوية مفدي زكرياء - الأزهرية
إمتحانات بكالوريا تجريبية

المدة: 03 سا و 30 د

إختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = -3$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3n - 1$$

1 / أ) أحسب u_1, u_2, u_3 .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$: $u_n > 0$.

ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$: $u_n > 3n - 4$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

2 / لتكن المتتالية العددية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي : $v_n = u_n - 9n + 30$.

أ) برهن أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

3 / أ) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1+1} \times e^{v_2+2} \times \dots \times e^{v_n+n}$.

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوق به ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم 0 و كريتان حمراوان تحملان الرقم 5 و كرية بيضاء تحمل الرقم α (α عدد طبيعي يختلف عن 5 و 10) ، سحب لاعب ثلاث كريات في آن واحد (الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس).

1 / أ) أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : اللاعب يسحب ثلاث كريات من نفس اللون .

B : اللاعب يسحب ثلاث كريات من ألوان مختلفة .

C : اللاعب يسحب كريتين من نفس اللون .

2 / اللاعب يربح مجموع الأعداد المسجلة على الكريات الثلاثة ، نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب ثلاث كريات الربح بالدينار الذي يتحصل عليه اللاعب .

أ) عيّن قيم X و بيّن أن $P(X = \alpha) = \frac{3}{20}$.

ب) عيّن قانون احتمال X .

ج) أحسب بدلالة α الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثم عيّن قيمة α حتى يربح اللاعب 20 دينارا .
التمرين الثالث: (04 نقطة)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_C = \overline{z_A}$ ، $z_B = iz_A$ ، $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1/ أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الجبري و الأسّي .

2/ أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية : (E) $\dots \frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$.
 ب) استنتج أنّ النقطة A هي صورة النقطة B بالتشابه S الذي مركزه Ω ذات اللاحقة z_Ω (هو حل المعادلة (E)) يطلب تعيين نسبته و زاويته .

3/ عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا تماما .

4/ أ) عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z = z_C - k\frac{z_A}{z_C}$ ، لما k يمسح \mathbb{R}_+^* .

ب) عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg \left[\left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right)^2 \right] = \pi + 2\pi k$.

التمرين الرابع: (08 نقطة)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بالعبارة : $f(x) = x + \ln|e^x - 1|$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ ، فسّر النتيجةين بيانيا .

2/ بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم : $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$.

ب) أدرس إتجاه تغير f و شكّل جدل تغيراتها .

3/ أ) بيّن أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) عند $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له .

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.

ج) استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ') عند $+\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له .

د) حدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

هـ) عيّن معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$.

4/ أ) برهن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.4 < \alpha < 0.5$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

ب) أثبت أنّ α يحقق : $e^{2\alpha} - e^\alpha - 1 = 0$ ، ثم أبشئ كلا من (C_f) ، (Δ) ، (Δ') .

5/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = |m|x$.

6/ الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $h(x) = -2|x| + \ln|1 - e^{|x|}|$.

أ) تحقق أنّ : $h(x) = f(-|x|)$ ، ثم بيّن أنّ h دالة زوجية .

ب) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ، ثم أرسمه في نفس المعلم (C_h) (منحنى الدالة h) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقطة)

- لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.
- 1 / أ) أحسب u_1, u_2 ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n > 1$.
 ب) بيّن أن (u_n) متناقصة تماما على \mathbb{N} .
 ج) استنتج أن (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .
- 2 / لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ : $v_n = u_n^2 - 1$.
 أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $2v_{n+1} = v_n$.
 ب) استنتج أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .
 ج) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n ، ثم أحسب من جديد نهاية المتتالية (u_n) .
- 3 / أحسب بدلالة n المجاميع التالية :
 $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$ ، $S'_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \dots + 2^n v_n$ ، $S''_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \dots + \ln(v_n)$.

التمرين الثاني: (04 نقطة)

- 1 / α عدد مركب ، $\bar{\alpha}$ مرافقه ، أثبت أن $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ معناه α تخيلي صرف .
- 2 / a عدد مركب يختلف عن 0 ، نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن a العدد المركب $f(z)$ حيث :
 $f(z) = \frac{az}{z-a}$.
 < أثبت أن $f(z)$ تخيلي صرف معناه : $|z|^2 \times \text{Re}(a) = |a|^2 \times \text{Re}(z)$ يرمز إلى الجزء الحقيقي و $|\cdot|$ ترمز إلى الطويلة) .
- 3 / نضع : $a = -1 + i$.
 أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث ؛ $f(z)$ تخيلي صرف .
 ب) نعتبر (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(f(z) - a) = \frac{9\pi}{4}$.
 < بيّن أن (Δ) هي نصف مستقيم باستثناء النقطة A ذات اللاحقة a ، أكتب معادلته الديكارتية .
- 4 / أكتب $f(z)$ على الشكل الجبري ، ثم عيّن B نقطة تقاطع (Γ) و (Δ) .

التمرين الثالث: (04 نقطة)

يحتوي صندوق على كريات متماثلة ، منها n كرية بيضاء تحمل العدد π (n عدد طبيعي ، $n \geq 2$) ، و أربع كريات حمراء تحمل الأعداد $\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ و كرتين خضراوين تحملان العددين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{3}$ ، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق (الكرات لانفرق بينها عند اللمس) .

1 أ) أحسب احتمال كل من الحدثين A و B حيث ؛ A : سحب كرتين من نفس اللون ، B : سحب كرتين تحملان نفس العدد .

ب) عيّن n حتى يكون $P(A) = \frac{17}{55}$.

2 نفرض أن $n = 5$ و نسمي α و β العددين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين ، نعتبر X المتغير العشوائي

الذي يربط بكل نتيجة سحب العدد $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.

(أ) برر أن قيم X هي $1, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{2}$.

(ب) بين أن $P(X=0) = \frac{27}{55}$.

(ج) عرّف قانون إحتمال X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع: (08 نقطة)

(I) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني و (Γ) المنحنى

الذي معادلته $y = \ln x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 / أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

2 / بين أنه من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{1 + (\ln x)^2}{x(\ln x)^2}$.

3 / أدرس اتجاه تغير f و شكّل جدول تغيراتها .

4 / أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا .

5 / أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Γ) .

(II) نريد البحث عن المماسات للمنحنى (C_f) المارة من المبدأ O ، ليكن a عدد حقيقي من المجال $]1; +\infty[$.

1 / برهن أن المماس (T_a) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a يمر من المبدأ O معناه

$$f(a) - af'(a) = 0$$

2 / لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بالعلاقة $g(x) = f(x) - xf'(x)$

برهن أنه على المجال $]1; +\infty[$ المعادلتين $g(x) = 0$ و $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ لهما نفس الحلول .

3 / لتكن الدالة u المعرفة على \mathbb{R} بـ : $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$.

(أ) أدرس تغيرات الدالة u و شكّل جدول تغيراتها .

(ب) بين أن الدالة u تنعدم مرة واحدة فقط على \mathbb{R} .

(ج) استنتج وجود مماس وحيد للمنحنى (C_f) يمر من المبدأ .

(د) أثبت أن الحل الوحيد α للمعادلة $u(x) = 0$ يحقق : $1.83 < \alpha < 1.84$.

(هـ) استنتج أن معادلة المماس (T_{e^α}) المار من المبدأ هي : $y = \left(\frac{1 + \alpha^2}{e^\alpha \alpha^2} \right) x$.

(III) 1 / أنشئ (C_f) ، (Γ) ، و (T_{e^α}) (يعطى : $\alpha = 1.8$ ، $e^\alpha = 6.26$) .

2 / m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx$.

بالتوفيق في إمتحان شهادة البكالوريا إن شاء الله

الحل المفصل للكالوريا التجريبية 2021 شعبة علوم تجريبية

حل التمرين الأول : (04 نقاط)

$$. u_1 = 0, u_2 = 5, u_3 = \frac{34}{3} \quad (أ) / 1$$

(ب) نضع : $u_n > 0$: $P(n)$.

$<$ من أجل $n = 3$ لدينا $u_3 = \frac{34}{3} > 0$ و $\frac{34}{3} > 0$ و منه $P(3)$ صحيحة .

$<$ نفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل $n \geq 3$ و نثبت أنّ $P(n+1)$ صحيحة ($n \geq 3$).

$u_n > 0$ و $3n - 1 > 0$ و $u_n > 0$ و منه $\frac{2}{3}u_n + 3n - 1 > 0$ من أجل $n \geq 3$ و $u_{n+1} > 0$ من أجل كل $n \geq 3$ و

منه $P(n+1)$ صحيحة ($n \geq 3$) ، ذن و منه $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$.

(ج) لدينا $u_n - 3n + 4 = \frac{2}{3}u_n + 3$ ، لكن $u_n > 0$ و منه $u_n - 3n + 4 > 0$ و منه $u_n > 3n - 4$ من أجل كل

عدد طبيعي $n \geq 4$ ، لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - 4) = +\infty$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(أ) / 2 $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ من أجل كل عدد طبيعي n و منه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = 27$.

$$(ب) . v_n = 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9n - 30 , u_n = 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$(أ) / 3 . P_n = e^{71 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{n(n+1)}{2}} , P_n = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1 + 2 + \dots + n}$$

(ب) $S_n = (v_0 + 9 \times 0 - 30) + (v_1 + 9 \times 1 - 30) + \dots + (v_n + 9 \times n - 30)$ و منه

$$S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 9 \times (1 + 2 + \dots + n) - 30(n+1)$$

$$. S_n = 71 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{9n(n+1)}{2} - 30(n+1)$$

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

$$. P(C) = \frac{C_3^2 \times C_3^1 + C_2^2 \times C_4^1}{20} = \frac{10}{20} , P(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_6^3} = \frac{6}{20} , P(A) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20} / 1$$

$$. P(X = \alpha) = \frac{C_1^1 \times C_3^2}{20} = \frac{3}{20} , X = \{0, 5, 10, \alpha, \alpha + 5, \alpha + 10\} \quad (أ) / 2$$

X	0	5	10	α	$\alpha + 5$	$\alpha + 10$
$P(X = x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$\frac{100 + 10\alpha}{20} = 20 \text{ و منه } E(x) = 20 , E(X) = \frac{30}{20} + \frac{30}{20} + \frac{3\alpha}{20} + \frac{6\alpha + 30}{20} + \frac{\alpha + 10}{20} = \frac{100 + 10\alpha}{20} \quad (ج)$$

و منه $\alpha = 30$ DA

حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

$$. z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}} , z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} , z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} / 1$$

$$. z_C = 1 - i , z_B = -1 + i , z_A = 1 + i$$

$$. z = -\frac{1}{3} + i \text{ و منه } 3z = 3i - 1 \text{ و منه } 1 + i - z = 2 - 2i + 2z \text{ و } \frac{1 + i - z}{-1 + i - z} = 2e^{i\pi} \quad (أ) / 2$$

- (ب) لدينا $z_\Omega = -\frac{1}{3} + i$ و يحقق المعادلة (E) أي $\frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi}$ و منه $\frac{z_A - z_\Omega}{z_B - z_\Omega} = 2e^{i\pi}$ و منه $\theta = \pi$. زاويته $k = 2$ و نسبته Ω الذي مركزه S بالتشابه B صورة A من صورة B بالتشابه S الذي مركزه Ω و نسبته $k = 2$ و زاويته $\theta = \pi$.
 (3) $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ ، $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي موجب تماما و منه $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \pi k$ و منه $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) > 0$ و $\frac{n\pi}{2} = 2\pi k$ و منه $n = 4k$ مع $k \in \mathbb{N}$.
 (4) $z - z_C = \sqrt{2}ki$ و منه $\vec{CM} = k\sqrt{2}\vec{w}$ حيث $\vec{w} = (0, 1)$ و منه (Γ_1) هي نصف المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مع $y > -1$ (نصف المستقيم (CE)) ، حيث $z_E = 1$.
 (ب) $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ و منه $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right)^2 = \pi + 2\pi k$ و منه $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ و منه (Γ_2) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

حل التمرين الرابع : (08 نقاط)

- 1/ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 (ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ، التفسير : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي لـ (C_f) .
 2/ (أ) f قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ أي $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$.
 (ب) إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$2e^x - 1$	-	0	+	+
$e^x - 1$	-	-	-	+
$f'(x)$	+	0	-	+

- و منه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty, -\ln 2[$ ، $]0, +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-\ln 2, 0[$.
 جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(-\ln 2)$	$-\infty$	$+\infty$

- 3/ (أ) لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.
 (ب) $f(x) = x + \ln\left|e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right|$ و منه $f(x) = x + \ln\left|1 - \frac{1}{e^x}\right| + x$ لكن $e^x - 1 > 0$ على المجال $]0; +\infty[$ و منه $\left|1 - \frac{1}{e^x}\right| = \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$ و منه $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.
 (ج) لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 0$ و منه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.
 (د) $f(x) = x$ إذن $\ln|e^x - 1| = 0$ و منه $|e^x - 1| = 1$ و منه $e^x - 1 = 1$ أو $e^x - 1 = -1$ و منه $e^x = 2$ أو $e^x = 0$ و منه $x = \ln 2$ ، إذن (C_f) قطع (Δ) في النقطة $(\ln 2, \ln 2)$.

هـ- معادلة (T) هي $y = f'(\ln 2)(x - 2) + f(\ln 2)$ ، لدينا $f'(\ln 2) = 3$ و $f(\ln 2) = \ln 2$ و منه
 $(T) : y = 3x - 2 \ln 2$.

أ/4 f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و خاصة على المجال $[0.4, 0.5]$ و
 $f(0.4) \times f(0.5) < 0$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث
 $0.4 < \alpha < 0.5$ أما على المجال $]-\infty, 0[$ المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلا لأن $f(x) < 0$.

إشارة $f(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f(x)$		-	0	+

ب) لدينا $f(\alpha) = 0$ و منه $\alpha + \ln |e^\alpha - 1| = 0$ و منه $e^\alpha - 1 = e^{-\alpha}$ لكن $\alpha > 0.4$ و منه $e^\alpha - 1 > 0$ و
 $e^\alpha - 1 = e^{-\alpha}$ و منه $e^\alpha - 1 - \frac{1}{e^\alpha} = 0$ و منه $\frac{e^{2\alpha} - e^\alpha - 1}{e^\alpha} = 0$ و منه $e^{2\alpha} - e^\alpha - 1 = 0$.
الرسم في آخر الورقة .

5/ حلول المعادلة $f(x) = |m|x$ بيانيا هي فوصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y = |m|x$
هذا المستقيم يشمل المبدأ مهما تغير m ، من البيان نجد :

إذا كان $|m| \leq 1$ أي $-1 \leq m \leq 1$ فإن المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلا وحدا موجبا .

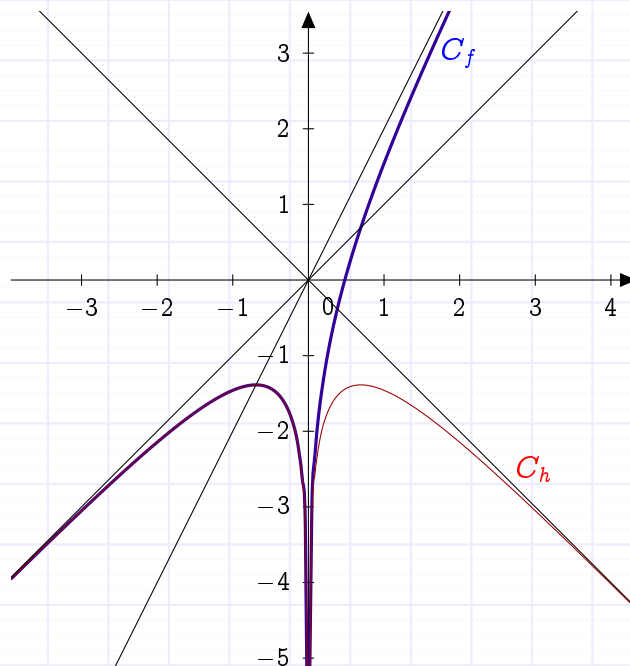
ذا كان $1 < |m| < 2$ أي $m \in]-2, -1[\cup]1, 2[$ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

إذا كان $|m| \geq 2$ أي $m \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ المعادلة $f(x) = |m|x$ تقبل حلا وحدا سالبا .

6/ أ) لدينا $f(-|x|) = -|x| \ln |e^{-|x|} - 1|$ و منه $f(-|x|) = -|x| \ln |e^{-|x|} - 1|$ و منه
 $f(-|x|) = h(x)$.

، من أجل كل $x \neq 0$ ، $-x \neq 0$ و $h(-x) = f(-|-x|)$ أي $h(x) = f(-|x|)$ لأن $|-x| = |x|$ و منه
 $h(x) = h(-x)$ ، إذن h زوجية .

ب) لدينا من أجل $x \in]-\infty, 0[$ ، $h(x) = f(x)$ ، و منه (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]0; -\infty[$ ، ثم
نناظر هذا الجزء بالنسبة إلى حامل محور الترتيب لنتحصل على الجزء الباقي من (C_h) .



حل التمرين الأول : (04 نقاط)

$$. u_2 = \sqrt{3} , u_1 = \sqrt{5} \text{ (+/1)}$$

$$. P(n) : u_n > 1$$

◁ من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = 3$ و $3 > 1$ و منه $P(0)$ صحيحة .

◁ نفرض أن $P(n)$ وثبت أن $P(n+1)$ صحيحة حيث n عدد طبيعي .

$$، u_{n+1} > 1 \text{ و منه } \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} > 1 \text{ و منه } \frac{1+u_n^2}{2} > \frac{2}{2} \text{ و منه } u_n^2 > 1 \text{ و منه } u_n > 1$$

إذن $P(n+1)$ صحيحة .

إذن $u_n > 1$ من أجل كل عدد طبيعي n .

$$\text{ب) } u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}$$

$u_{n+1} - u_n < 0$ من أجل كل عدد طبيعي n و منه (u_n) متناقصة تماما على \mathbb{N} .

ج) (u_n) محدودة من الأسفل بـ 1 و متناقصة تماما فهي متقاربة نضع : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ، و منه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l \text{ و منه } l = \sqrt{\frac{1+l^2}{2}} \text{ مع } l \geq 1 \text{ و منه } l^2 = \frac{1+l^2}{2} \text{ و منه } \frac{(l+1)(l-1)}{2} = 0 \text{ و منه } l = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ ، إذن } l = 1$$

$$. 2v_{n+1} = 2u_{n+1}^2 - 2 = u_n^2 - 1 = v_n , v_n = u_n^2 - 1 \text{ (أ) /2}$$

$$\text{ب) } v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n \text{ و منه } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ و حدها الأول } v_0 = 8$$

$$\text{ج) } v_n = v_0 \times q^n \text{ و منه } v_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n , v_n = u_n^2 - 1 \text{ و منه } u_n = \sqrt{v_n + 1} = \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

$$. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ و منه } (u_n > 0)$$

$$/3 \text{ لدينا } 2^n \times v_n = 8 \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ و منه } S'_n = 8 + 8 + \dots + 8 = 8(n+1)$$

$$S_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \dots + (v_n + 1) \text{ و منه } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + n + 1 \text{ و منه}$$

$$S''_n = \ln(v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n) , S_n = 16 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + n + 1 \text{ و منه } S_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + n + 1$$

$$. S''_n = \ln \left[(8)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right] \text{ و منه}$$

حل التمرين الثاني : (04 نقاط)

1/ α تخيلي صرف معناه $Re(\alpha) = 0$ ، معناه $2Re(\alpha) = 0$ معناه $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ لأن $\alpha + \bar{\alpha} = 2Re(\alpha)$.

$Re(\cdot)$ يرمز إلى الجزء الحقيقي .

$$/2 \text{ } f(z) \text{ تخيلي صرف معناه } f(z) + \overline{f(z)} = 0 \text{ و منه } \frac{az}{z-a} + \overline{\left(\frac{az}{z-a}\right)} = 0 \text{ و منه } \frac{az}{z-a} + \frac{\bar{a}\bar{z}}{\bar{z}-\bar{a}} = 0$$

$$\text{و منه } \frac{azz - a\bar{a}z + \bar{a}z\bar{z} - a\bar{a}\bar{z}}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})} = 0 \text{ و منه } z\bar{z}(a + \bar{a}) = a\bar{a}(z + \bar{z}) \text{ لكن } z\bar{z} = |z|^2 \text{ و } a\bar{a} = |a|^2 \text{ و منه}$$

$$: \text{ معناه } a\bar{a} = 2Re(a) \text{ و } z + \bar{z} = 2Re(z) \text{ لكن } |z|^2(a + \bar{a}) = |a|^2(z + \bar{z})$$

$$. |z|^2 \times Re(a) = |a|^2 \times Re(z)$$

$$. a = -1 + i / 3$$

(أ) $f(z)$ تخيلي صرف معناه $|z|^2 \times Re(a) = |a|^2 \times Re(z)$ ، نضع $z = x + iy$ و منه $(x^2 + y^2) \times (-1) = 2x$ و منه $x^2 + y^2 + 2x = 0$ و منه $(x+1)^2 + y^2 = 1$ و منه (Γ) هي الدائرة الت مركزها $(-1, 0)$ و نصف قطرها $r = 1$.

(ب) لدينا $f(z) - a = \frac{a^2}{z-a}$ و منه $\arg(f(z) - a) = \arg\left(\frac{a^2}{z-a}\right) = 2\arg(a) - \arg(z-a)$ و منه $\arg(f(z) - a) = \frac{9\pi}{4}$ معناه $\arg(z-a) = \frac{9\pi}{4} - 2\frac{3\pi}{4}$ و منه $\arg(z-a) = -\frac{3\pi}{4}$ و منه

$(\vec{u}, AM) = -\frac{3\pi}{4}$ و منه (Δ) هو نصف المستقيم AC حيث $z_C = -2$ معادلته الديكارتية هي $y = x + 2$ و $x < -1$.

4/ نضع $z = x + iy$ و منه $f(z) = \frac{az}{z-a} = \frac{az(\bar{z}-\bar{a})}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}$ و منه $f(z) = \frac{azz\bar{z} - a\bar{a}z}{|z-a|^2}$ ، لدينا $z - a = (x+1) + i(y-1)$ و منه $|z-a|^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$ و $z\bar{z} = x^2 + y^2$ و $a\bar{a} = 2$ و منه $f(z) = -\frac{x^2 + y^2 + 2x}{(x+1)^2 + (y-1)^2} + i\frac{x^2 + y^2 - 2y}{(x+1)^2 + (y-1)^2}$ لدينا $x^2 + y^2 + 2x = 0$ و $y = x + 2$ مع $x < -1$ و منه $x^2 + 3x + 2 = 0$ و $x < -1$ و منه $x = -2$ و $y = 0$ ، إذن $B(-2, 0)$.

حل التمرين الثالث : (04 نقاط)

1/ (أ) $P(B) = \frac{C_{n+1}^2 + C_n^2 + C_3^2}{C_{n+6}^2} = \frac{10 + n^2 + n}{n^2 + 11n + 30}$ ، $P(A) = \frac{C_n^2 + C_4^2 + C_2^2}{C_{n+6}^2} = \frac{14 + n^2 - n}{n^2 + 11n + 30}$ (ب) $P(A) = \frac{17}{55}$ معناه $\frac{14 + n^2 - n}{n^2 + 11n + 30} = \frac{17}{55}$ و منه $19n^2 - 121n + 130 = 0$ حلول هذه المعادلة في \mathbb{N} هي $n = 5$.

2/ نفرض أن $n = 5$.

(أ) $\alpha, \beta \in \left\{ \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\}$.

الجدول الموالي يبين القيم الممكنة لـ $\cos \alpha \cos \beta$.

	$\cos \alpha$	-1	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \beta$	-1	1	$-\frac{1}{2}$	0
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
	0	0	0	0

و منه القيم الممكنة لـ X هي $\left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 1 \right\}$.

(ب) $P(X=0) = \frac{27}{55}$ أي $P(X=0) = \frac{C_3^2 + C_3^1 \times C_8^1}{C_{11}^2}$.

x	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
$P(X=x)$	$\frac{27}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{15}{55}$

$$. E(X) = \frac{1 - 24 + 60}{220} = \frac{37}{220}$$

حل التمرين الرابع : (04 نقاط)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (I)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ (ب)}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^2 + 1}{x(\ln x)^2} \text{ و } f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(\ln x)^2} \text{ و }]1; +\infty[\text{ على المجال } f/2$$

$$f/3 \text{ لدينا } f'(x) > 0 \text{ من أجل كل } x \text{ من المجال }]1; +\infty[\text{ و منه } f \text{ متزايدة تماما على المجال }]1; +\infty[.$$

جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = 0 \text{ /4 و منه } (C_f) \text{ و } (\Gamma) \text{ متقاربان عند } +\infty.$$

$$f(x) - \ln x = -\frac{1}{\ln x} < 0 \text{ و }]1; +\infty[\text{ على المجال } (C_f) \text{ يقع تحت } (\Gamma) \text{ على المجال }]1; +\infty[.$$

$$\text{II /1 } (T_a) \text{ معادلته } y = f'(a)(x - a) + f(a), \text{ يشمل المبدأ معناه } 0 = f'(a)(-a) + f(a) \text{ و منه}$$

$$f(a) - a f'(a) = 0$$

$$g(x) = 0 \text{ /2 معناه } \ln x - \frac{1}{\ln x} + \frac{1 + (\ln x)^2}{(\ln x)^2} = 0 \text{ و منه } \frac{(\ln x)^2 - (\ln x) - 1 - (\ln x)^2}{(\ln x)^2} = 0 \text{ و منه}$$

$$(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - (\ln x) - 1 = 0$$

$$\text{و منه المعادلتين } g(x) = 0 \text{ و } (\ln x)^3 - (\ln x)^2 - (\ln x) - 1 = 0 \text{ لهما نفس الحلول.}$$

$$\text{3 /أ } u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 \text{ و إشارة } u'(t) \text{ كما يلي :}$$

t	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$u'(t)$		+	0	-

$$\text{و منه } u \text{ متزايدة تماما على المجالين }]-\infty; -\frac{1}{3}[\text{ و }]1; +\infty[\text{ و متناقصة تماما على المجال }]-\frac{1}{3}; 1[.$$

جدول التغيرات :

t	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$u'(t)$		+	0	-
$u(t)$	$-\infty$	$f(-\frac{1}{3})$	$f(1) = -1$	$+\infty$

$$\text{ب) الدالة } u \text{ مستمرة و متزايدة تماما على المجال }]1; +\infty[\text{ و }]-1; +\infty[\text{ و منه حسب مبرهنة القيم}$$

$$\text{المتوسطة المعادلة } u(t) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha, \text{ أما على المجال }]-\infty; 1[\text{ المعادلة } u(t) = 0 \text{ لا تقبل حلا لأن}$$

$$u(t) < 0 \text{ و منه } u \text{ تنعدم مرة واحدة على } \mathbb{R}.$$

