

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث كل الكرات لانفرك بينهما عند اللمس و:

U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 0 وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 0 .

U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 وكرتين خضراء تحمل الرقمين 1 ، 0 .
(1) نختار عشوائيا أحد الصندوقين ، فإذا كان U_1 أحد نسحب منه كرتين على التوالي بدون إرجاع ،
وإذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي بالإرجاع .

1. احسب احتمال الحوادث التالية :

A: "سحب كرتين من نفس اللون "

B: "سحب كرتين تحملان نفس الرقم "

C: "سحب كرة حمراء على الأقل "

2. هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ علل .

3. إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين . فما هو احتمال أن تكون من الصندوق U_1 ؟

(II) نأخذ كل الكرات الموجودة في U_1 و U_2 ونضعها في صندوق آخر U_3 . نسحب عشوائيا من

الصندوق U_3 كرتين في آن واحد. وليكن x المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الأرقام

التي تحملها الكرتين المسحوبتين .

1. عين قيم المتغير العشوائي x .

2. عين قانون الاحتمال لـ x ثم احسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي حيث: $A_0B_0 = 8$ (الوحدة هي السنتمتر) ، ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

نعرف متتالية النقط (B_n) كما يلي: $B_{n+1} = S(B_n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .

(1) أنشئ النقط B_1, B_2, B_3, B_4 .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان: $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.

(3) نعرف متتالية (u_n) بـ: $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ/ أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب/ أكتب عبارة u_n بدلالة n .

ج/ نضع المجموع: $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، أحسب δ_n بدلالة n ثم أوجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n$

(4) أ/ حل في $Z \times Z$ المعادلة: $3x - 4y = 2$

ب/ ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0 .

جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \square المعادلة ذات المجهول z : $\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \dots (E)$

حيث: \bar{z} هو مرافق العدد المركب z .

أ/ بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $(\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$.

ب/ حل في \square المعادلة (E) .

(2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقها

على الترتيب: $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \bar{z}_B$ ، $z_D = 3$.

أ/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا.

ب/ عين طبيعة المثلث ABC .

(3) أ/ أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .

(4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحقها z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3}k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0; +\infty[$

- عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overline{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ) .

5) أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون: $-\overline{CA} + 2\overline{CB} + \alpha\overline{CD} = \overline{0}$.

ب/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|-\overline{AM} + 2\overline{BM} - 3\overline{DM}\| \leq 2\|\overline{BM} - \overline{CM}\|$.

ج/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ) .

التمرين الرابع: (07نقاط)

1) $g(x) = x^2 e^x$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

أ/ أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ استنتج أنه: إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$.

2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

h دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$. (C_h) تمثيلها البياني (أنظر الملحق)

أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

3) أ/ بين أن المعادلة: $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5 < \beta < 1.6$

و $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين.

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) .

ج/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته.

4) أ/ أرسم (T) و (C_f) . (الملحق يعاد مع ورقة الإجابة)

ب/ m عدد حقيقي موجب تماما، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متميزين:

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

5) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$.

ب/ ليكن العدد λ من المجال $]0; 1[$ ، $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_h)

والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = \lambda$ و $x = 1$

- استنتج $A(\lambda)$ (مقدرة بوحدة المساحة)، ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda)$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط $C(3;2;1)$ ، $B(1;2;0)$ ، $A(3;1;0)$

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha + \beta \\ y = \frac{3}{2} - 4\alpha + 2\beta ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = -5\alpha \end{cases}$$

و $D(0;0;m)$ حيث m عدد حقيقي موجب، (Q) مستوي معرف بـ:

1/ أ/ أحسب الجداء السلمي $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos ABC$ و $\sin ABC$.
ب/ أحسب مساحة المثلث ABC .

ج/ بين أن $\vec{n}(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

د/ بين أن $ABCD$ رباعي وجوه و أن حجمه: $V = \frac{2m+5}{6} uv$

2/ أ/ بين أن: (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية: $-2x + y = \frac{-5}{2}$.

ب/ استنتج أن المستويين (ABC) و (Q) متعامدان وأنهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلها الوسيط.

ج/ أحسب $d(D; (Q))$ ثم استنتج بدلالة m المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ) .

3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$

أ/ بين أنه من أجل عدد حقيقي m فان (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب/ عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m) .

4) أكتب معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) و يمس سطح الكرة (S_m) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x - 5y = 2$

أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[11]$.

ب/ استنتج حلول المعادلة (E) .

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع: $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$.

أ/ عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ب/ عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $\text{PGCD}(a; b) = 2$.

ج/ استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $A = 5n^2 + 7n + 2$ و $B = 11n^2 + 15n + 4$.

أ/ بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

ب/ استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases}$$

(1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث:

$$z_A = 1 - i \text{ و } z_B = 2 + \sqrt{3} + i$$

اكتب z_A على الشكل الأسّي.

ب/بين أن: $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد z_B .

ج/هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

(3) أ/أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$.

ب/احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$. (مقدرة بوحدة المساحة)

ج/ عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg[(z - z_B)^2] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$

د/عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل، ثم اوجد لاحقة مركز ثقله.

(4) نضع: $f = ROS$ (يرمز O إلى تركيب التحويلين R و S).

أ/عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب/أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة).

(5) أ/إذا كان $S(M) = M'$ ، ما طبيعة المثلث OMM' ؟

ب/عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها: $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

(1) أ/تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$

ب/احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ج/أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ/بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتهما:

$$y = x - e \text{ و } y = -x + \ln 2 + e \text{ عند } +\infty \text{ وعند } -\infty \text{ على الترتيب.}$$

ب/أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D') .

ج/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_r).

(3) أرسم (Δ)، (D)، (D') و (C_r)

(4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته: $y = mx - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ/ بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$.

ب/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_r).

(5) نضع: $I = \int_{\ln \sqrt{2} + e}^{\ln \sqrt{3} + e} [f(x) - (x - e)] dx$ ، $I_n = \int_0^1 \ln(1 + X^n) dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ/ فسر هندسيا العدد I واحسب العدد I_1

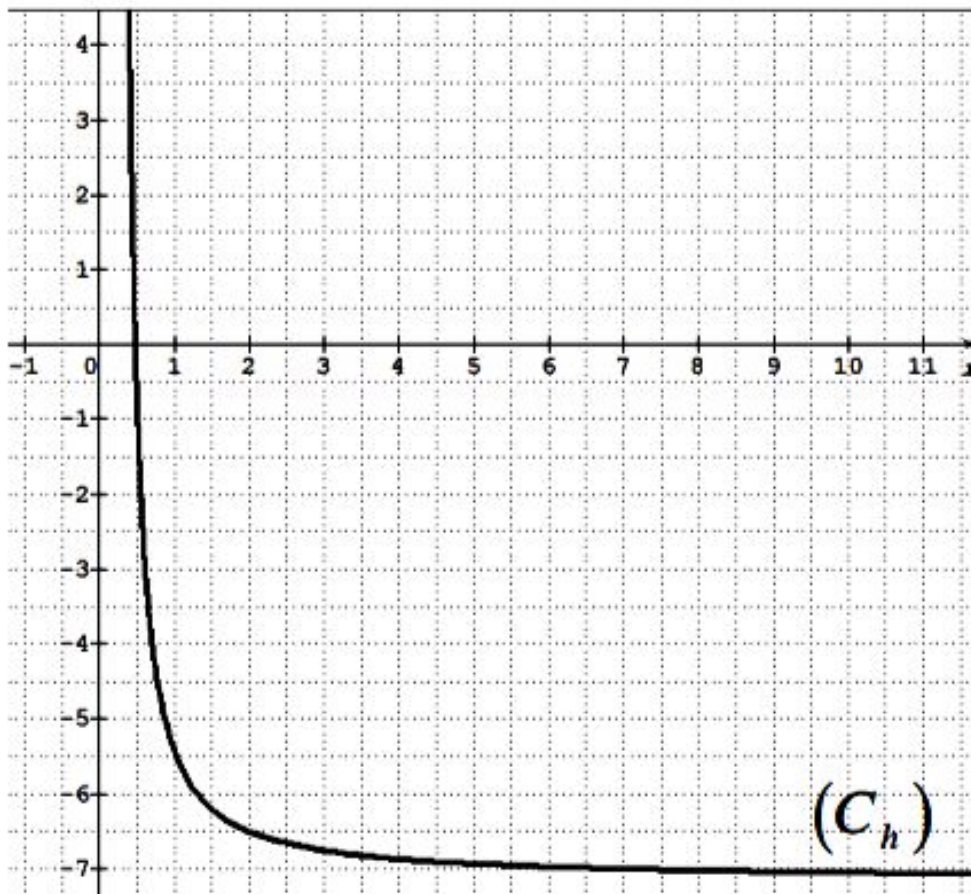
ب/ بين أن: $0 \leq I_n \leq \ln 2$

ج/ عين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(6) باستعمال: $\ln(1 + X) \leq X$ ، من أجل كل $X \in]0; +\infty[$

أ/ استنتج أن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2} + e}^{\ln \sqrt{3} + e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

ب/ اعط حصرا للعدد $I + I_1$.



الملحق:

الاسم:

اللقب:

القسم:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{689}{1400} = \frac{711}{1400}$$

$$P(Y \cap \bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{A_5^1 \times A_3^1 + A_3^1 \times A_5^1}{56} = \frac{15}{56}$$

$$P_{\bar{A}}(Y) = \frac{125}{137}$$

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب

$$C_n^p = C_{13}^2 = 78$$

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

| | | | | | |
|------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $p(x=x_i)$ | $\frac{3}{78}$ | $\frac{24}{78}$ | $\frac{34}{78}$ | $\frac{16}{78}$ | $\frac{1}{78}$ |

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

$$= 0 + \frac{24}{78} + \frac{68}{78} + \frac{48}{78} + \frac{4}{78} = \frac{144}{78}$$

$p(x=0)$: احتمال سحب كرتين من اللونين الآخرين

$$P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{78}$$

$p(x=1)$: احتمال سحب كرتين من اللونين الآخرين وكرتين من اللون

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_5^1}{C_8^2} = \frac{24}{78}$$

$p(x=2)$: احتمال سحب كرتين من اللونين الآخرين وكرتين من اللون

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_5^0 + C_3^0 \times C_5^2}{C_8^2} = \frac{34}{78}$$

$p(x=3)$: احتمال سحب كرتين من اللونين الآخرين وكرتين من اللون

$$P(X=3) = \frac{C_3^0 \times C_5^3}{C_8^2} = \frac{16}{78}$$

$p(x=4)$: احتمال سحب كرتين من اللونين الآخرين وكرتين من اللون

$$P(X=4) = \frac{C_3^0}{C_8^2} = \frac{1}{78}$$

$$P(Y) = P(\bar{Y}) = \frac{1}{2} \quad P(Y) + P(\bar{Y}) = 1$$

عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من اللونين الآخرين من الصندوقين Y_1 بدون عيار جمع (أثرية)

$$A_n^p = A_8^2 = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 56$$

عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من اللونين الآخرين من الصندوقين Y_2 بدون عيار جمع (أثية)

$$A_n^p = \frac{2!}{0!} = 25$$

A : "سحب كرتين من نفس اللون"

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{A_5^2 + A_3^2}{56} + \frac{1}{2} \times \frac{3^2 + 2^2}{25}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{20+6}{56} + \frac{1}{2} \times \frac{9+4}{25} = \frac{689}{1400}$$

B : "سحب كرتين أحدهما من نفس الرقم"

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{A_5^2 + A_3^2}{56} + \frac{1}{2} \times \frac{1^2 + 3^2 + 1^2}{25} = \frac{583}{1400}$$

C : "سحب كرة حمراء على الأقل"

$$P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{A_5^1 \times A_3^1 + A_3^1 \times A_5^1 + A_5^2}{56} + \frac{1}{2} \times \frac{1 \times 1 \times 56 + 3 \times 1 \times 25}{2 \times 3 + 3 \times 2 + 3} = \frac{1213}{1400}$$

$A \cap B$: "سحب كرتين من نفس اللون وكرتين من نفس الرقم"

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{A_3^2 + A_2^2}{56} + \frac{1}{2} \times \frac{2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{25} = \frac{37}{175} \approx 0,21$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{689}{1400} \times \frac{583}{1400} \approx 0,28$$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ ومنه الحاديات A و B غير مستقلة

$$P_{\bar{A}}(Y) = \frac{P(Y \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{1}{2} \times \frac{A_5^1 \times A_3^1 + A_3^1 \times A_5^1}{56} = \frac{15}{56}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط) $A_0B_0 = 8$ ، S التشابه المباشر

مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ، $B_{n+1} = S(B_n)$ ،

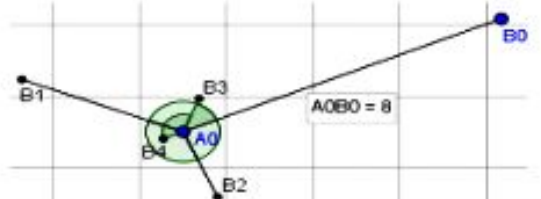
1) إنشاء النقط B_1, B_2, B_3, B_4 و B_4 :

$$k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} A_0B_1 = \frac{1}{2}A_0B_0 = 4 \\ (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_1}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ يكافئ } B_1 = S(B_0)$$

$$k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} A_0B_2 = \frac{1}{2}A_0B_1 = 2 \\ (\overline{A_0B_1}, \overline{A_0B_2}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_2 = S(B_1)$$

$$k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} A_0B_3 = \frac{1}{2}A_0B_2 = 1 \\ (\overline{A_0B_2}, \overline{A_0B_3}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_3 = S(B_2)$$

$$k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} A_0B_4 = \frac{1}{2}A_0B_3 = \frac{1}{2} \\ (\overline{A_0B_3}, \overline{A_0B_4}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_4 = S(B_3)$$



2) اثبات أن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$B_{n+1} = S(B_n) \text{ معناه } A_0B_{n+1} = \frac{1}{2}A_0B_n$$

$$\text{و بما أن } k \in \mathbb{Z}, (\overline{A_0B_n}, \overline{A_0B_{n+1}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\frac{A_0B_{n+2}}{A_0B_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}A_0B_{n+1}}{A_0B_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{A_0B_{n+1}}{A_0B_n} = \frac{\frac{1}{2}A_0B_n}{A_0B_n} = \frac{1}{2}$$

$$(\overline{A_0B_{n+1}}, \overline{A_0B_{n+2}}) = \left(\frac{1}{2}\overline{A_0B_n}, \frac{1}{2}\overline{A_0B_{n+1}} \right) = (\overline{A_0B_n}, \overline{A_0B_{n+1}})$$

فإن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

$$(\text{ضلعان و زاوية محصورة بينهما}) \text{ ومنه: } \frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{2}$$

3) اثبات أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$: نعرف

متتالية (u_n) $\rightarrow u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

$$\text{ومنه: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ متتالية هندسية أساسها}$$

$$\frac{1}{2} \text{ و حدها الأول } u_0 = B_0B_1$$

ب) كتابة عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = B_0B_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج) نضع المجموع: $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حساب δ_n بدلالة n ثم إيجاد $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$: م.ح.م هندسية

$$\delta_n = u_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2B_0B_1 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$$

$$\text{ومنه: } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 2B_0B_1$$

4) (*) نحل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $3x - 4y = 2$ (1)

$$(1) \text{ يكافئ } 3x = 4y + 2 \text{ يكافئ } 3x \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\text{يكافئ } x \equiv 2 \pmod{4} \text{ يكافئ } 7 \times 3x \equiv 7 \times 2 \pmod{4}$$

ومنه: $x = 4\lambda + 2, \lambda \in \mathbb{Z}$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$$y = 3\lambda + 1 \text{ إذن: } S = \{(4\lambda + 2; 3\lambda + 1); \lambda \in \mathbb{Z}\}$$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون

النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

لدينا: (Δ) العمودي على (A_0B_0) في النقطة A_0 وكذلك

$$(\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_n}) = (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_1}) + (\overline{A_0B_1}, \overline{A_0B_2}) + \dots$$

$$\dots + (\overline{A_0B_{n-1}}, \overline{A_0B_n}) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \dots + \frac{3\pi}{4} = n \frac{3\pi}{4}$$

$$B_n \text{ تنتمي إلى } (\Delta) \text{ معناه } \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ } k \in \mathbb{Z}, (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_n}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{نجد: } n \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ يكافئ } 3n = 2 + 4k$$

$$\text{يكافئ } 3n - 4k = 2 \text{ يكافئ } 3n = 2 + 4k$$

$$\text{ومنه قيم } n \text{ هي } n = 4k' + 2 \text{ } k' \in \mathbb{N}$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) (*)/ اثبات أن المعادلة (E) تكافئ: $(\bar{z} + 1)(z^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$

$$\text{لدينا: } (E) \dots \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$$

$$(\bar{z} + 1)(z^2 - 4\bar{z} + 7) = 0 \text{ يكافئ } \bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 7\bar{z} + \bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7 = 0$$

$$\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \text{ يكافئ}$$

ب) نحل في \mathbb{C} المعادلة (E) :

$$(E) \text{ تكافئ } (\bar{z} + 1)(z^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$$

$$\text{يكافئ } (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \text{ يكافئ } (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0$$

$$\text{يكافئ } \Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2, \begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 4z + 7 = 0 \end{cases}$$

$$z_2 = 2 + \sqrt{3}i \text{ و } z_1 = 2 - \sqrt{3}i$$

ومنه: من أجل k يسمح المجال $[0; +\infty[$ المجموعة (Γ)

هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه \overline{AB}

$$\text{لاحقته: } 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3 + i\sqrt{3}$$

5) *أ/ تعيين قيمة العدد α حيث $-\overline{CA} + 2\overline{CB} + \alpha\overline{CD} = \overline{0}$

$$-\overline{CA} + 2\overline{CB} + \alpha\overline{CD} = \overline{0}$$

معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A; -1), (B; 2), (D; \alpha)\}$

$$\alpha = -3 \text{ ومنه } \begin{cases} 2 = \frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha} \\ -\sqrt{3} = \frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x_C = \frac{-x_A + 2x_B + \alpha x_D}{-1+2+\alpha} \\ y_C = \frac{-y_A + 2y_B + \alpha y_D}{-1+2+\alpha} \end{cases}$$

ب/ *تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوى حيث:

$$(*) \dots \|\overline{-AM} + 2\overline{BM} - 3\overline{DM}\| \leq 2\|\overline{BM} - \overline{CM}\|$$

$$\|\overline{MA} - 2\overline{MB} + 3\overline{MD}\| \leq 2\|\overline{BM} + \overline{MC}\| \text{ تكافئ (*)}$$

$$\|-\overline{(-MA + 2MB - 3MD)}\| \leq 2\|\overline{BC}\| \text{ تكافئ (*)}$$

$$CM \leq BC \text{ تكافئ } \|(-1+2-3)\overline{CM}\| \leq 2BC \text{ تكافئ (*)}$$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C

ونصف قطره هو: $BC = 2\sqrt{3}$

ج/ *استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) ونصف

المستقيم $[AB]$: لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره

$BC = 2\sqrt{3}$ و $AC = 2\sqrt{3}$ معناه A تنتمي إلى القرص (E)

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم $[AB]$

هو القطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1) g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 e^x$

***أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$:**

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$: $g'(x) = (x^2 + 2x)e^x$

بما ان $g'(x) > 0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

ب/ *استنتاج أنه: إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

و إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $0 < x < 1$ فإن $x < \frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما

على $]0; +\infty[$ ، فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $x > 1$ فإن $x > \frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما على

$]0; +\infty[$ ، فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

ومنه: $S = \{-1; 2 - \sqrt{3}i; 2 + \sqrt{3}i\}$

2) *أ/ تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب

$(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B - z_A)^n = (2 + \sqrt{3}i + 1)^n = (3 + \sqrt{3}i)^n$$

$$\text{ومنه } (z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

عددا حقيقيا سالبا معناه:

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \text{ ومنه } \arg(z_B - z_A)^n = \pi + 2k\pi$$

إذن $n = 12k + 6; k \in \mathbb{N}$

ب/ *تعيين طبيعة المثلث ABC

$$AC = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$AB = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

بما ان $AB = AC = BC$: فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) *أ/ كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي:

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{-1 - 2 + i\sqrt{3}}{3 - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

***أ/ استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره**

$$\text{المميزة: } z_A - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_C) \text{ معناه } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي

مركزه النقطة C ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب/ تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

$$\begin{cases} \left| \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} \right| = \sqrt{3} \\ \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ لدينا: } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ معناه}$$

إذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة

بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

$$\text{لاحقتها } z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{1}{2}$$

4) *أ/ تعيين قياس للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overline{AB})$:

$$\text{لدينا: } (\vec{u}; \overline{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

***أ/ استنتاج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ حيث:**

$$z - z_A = k(z_B - z_A) \text{ معناه } z + 1 = 2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{معناه } \overline{AM} = k \cdot \overline{AB}$$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$
 $\Delta = -4$ لأن $x \in]0; +\infty[$ من أجل كل $x^2 - 2x + 2 > 0$
 ومنه: (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0; +\infty[$

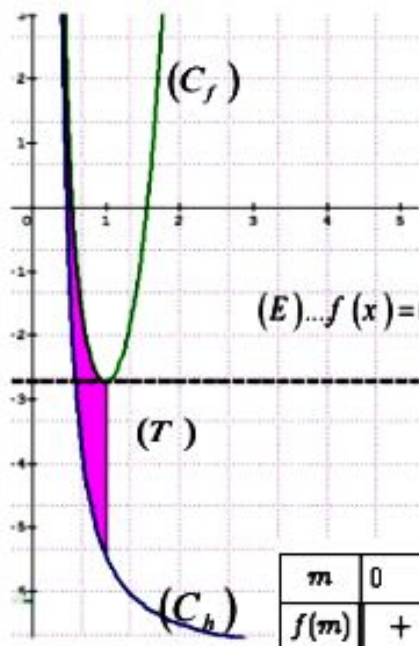
ج / * نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 بطلب كتابة معادلته :

بما ان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ فإن تمثيلها (C_f) يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0; +\infty[$ مماسا

$$f'(1) = 0; f(1) = -e, (T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ومنه: $(T): y = -e$

4 / * **رسم** (T) و (C_f) :



ب / * **ايجاد قيم m حتى تقبل المعادلة (E)**

حلين متمايزين:

لدينا m وسيط حقيقي حيث $m > 0$

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^x + h(m)$$

المعادلة (E) تكافئ

$$f(x) = f(m)$$

إشارة $f(m)$:

| | | | | |
|--------|---|----------|---|--------------|
| m | 0 | α | 1 | $E + \infty$ |
| $f(m)$ | + | 0 | - | - |

من أجل $m = 1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا .
 ومنه: المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين لما
 $m \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$

5 / * **نبين أنه من أجل كل x من المجال** $]0; +\infty[$:

$$\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

$$\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = \int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt$$

الدالة: $(t^2 - 2t + 2)e^t \rightarrow t$ مستمرة على $]0; +\infty[$ فهي تقبل دوالا أصلية على $]0; +\infty[$

$$[(t^2 - 4t + 6)e^t - 3e]' = (t^2 - 2t + 2)e^t$$

$$\int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt = \int_1^x [(t^2 - 4t + 6)e^t - 3e] dt$$

$$= (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

2 / معرفة على $]0; +\infty[$: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$
ا / * **حساب** $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب / * **نبين أنه من أجل كل x من المجال** $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(x) = x^2 e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0$$

ج / * **تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال** $]0; +\infty[$:

| | | |
|---------|---|--------------|
| x | 0 | $1 + \infty$ |
| $f'(x)$ | - | + |

إشارة $f'(x)$:

f متزايدة تماما على $]1; +\infty[$

f متناقصة تماما على $]0; 1[$

| | | | |
|---------|-----------|--------------|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $-e = -2.71$ | $+\infty$ |

3 / * **نبين أن المعادلة** $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل

حلين α و β حيث: $1.5 < \beta < 1.6$ و $0.5 < \alpha < 0.6$

$$(x^2 - 2x + 2)e^x + h(x) = 0 \text{ تكافئ } (x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$$

تكافئ $f(x) = 0$ ، لدينا: $f(0.6) \approx -0.74$ ، $f(0.5) \approx 1.25$

بما ان الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]0.5; 0.6[$

$$f(0.6) \times f(0.5) < 0$$

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد α

$$f(\alpha) = 0, 0.5 < \alpha < 0.6$$

$$\text{لدينا: } f(1.6) \approx 0.44, f(1.5) \approx -0.60$$

بما ان الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $]1.5; 1.6[$

$$f(1.6) \times f(1.5) < 0$$

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد β

$$f(\beta) = 0, 1.5 < \beta < 1.6$$

ا / * **استنتاج أن** (C_f) **يقطع محور الفواصل في نقطتين:**

بما ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β فإن (C_f)

يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β

ب / * **دراسة وضعية المنحنى** (C_f) **بالنسبة للمنحنى** (C_h) :

لدينا $0 + 2(0) - 2m - 5 = 0$ أي $m = -\frac{5}{2}$ إذن: $D \in (ABC)$

لأن m عدد حقيقي موجب ومنه: $ABCD$ رباعي وجوه
 * نبين أن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو $V = \frac{2m+5}{6} uv$

لدينا $h = d(D, (ABC))$, $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times h$ هو الارتفاع

$$d(D; (ABC)) = \frac{|-2m-5|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2m+5}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2m+5}{3} = \frac{2m+5}{6} uv \text{ ومنه}$$

(2) * نبين أن (Q) هو المستوى المحوري لقطعة المستقيم

$[AB]$ معادلته الديكارتية $-2x + y = \frac{-5}{2}$ هناك عدة طرق منها

* إحداثيات $I(2; \frac{3}{2}; 0)$ منتصف $[AB]$ تحقق التمثيل الوسيط لـ

(Q) والشعاع $\overline{AB}(2, -1, 0)$ عمودي على شعاعي توجيهه

$\vec{u}(2; -4; -5)$ ومنه (Q) مستوي محوري لـ $[AB]$

* تعيين معادلة (Q) : لدينا

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha + \beta \dots (1) \\ y = \frac{3}{2} - 4\alpha + 2\beta \dots (2) \\ z = -5\alpha \dots (3) \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

يكافئ $\alpha = \frac{z}{-5}$ بالتعويض في (1) نجد: $x = 2 - 2\left(\frac{z}{-5}\right) + \beta$

ومنه: $\beta = x - 2 - \frac{2z}{5}$ نعوض قيمة α و β في (2) نجد:

$$-2x + y = \frac{-5}{2} \text{ ومنه } y = \frac{3}{2} - 4\left(\frac{z}{-5}\right) + 2\left(x - 2 - \frac{2z}{5}\right)$$

ومنه معادلة (Q) هي: $-4x + 2y + 5 = 0$

* بطريقة أخرى: (Q) يشمل $I(2; \frac{3}{2}; 0)$ منتصف $[AB]$

و $\overline{AB}(-2; 1; 0)$ شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيط يحقق

(Q) : $-2x + y = \frac{-5}{2}$ ومنه المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$

* استنتاج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان وهما

مقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيط:

$$\text{بما أن } \vec{n} \cdot \overline{AB} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (1) + 0 \cdot (-2) = 0 \text{ فإن } (Q)$$

و (ABC) متعامدان فهما مقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

* تعيين التمثيل الوسيط للمستقيم (Δ) :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - 5 = 0 \dots (1) \\ -4x + 2y + 5 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

ب طرح (2) من (1) نجد:

ب/ * استنتاج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_h)

و (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \lambda$ و $x = 1$

(مقدرة بوحدة المساحة) حيث $\lambda \in]0; 1]$:

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda [f(t) - h(t)] dt = - \int_1^\lambda [f(t) - h(t)] dt$$

$$A(\lambda) = - [(\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda - 3e]$$

$$= (3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda) u a$$

$$\text{حساب } \lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda] = 3e$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول: (04 نقاط)

$D(0; 0; m)$ و $C(3; 2; 1)$, $B(1; 2; 0)$, $A(3; 1; 0)$

(1) * حساب $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$: $\overline{BA}(2; -1; 0)$, $\overline{BC}(2; 0; 1)$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 2(2) + 0(-1) + 1(0) = 4$$

لدينا: $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 2(2) + 0(-1) + 1(0) = 4$

* استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ $\cos ABC$ و $\sin ABC$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \|\overline{BA}\| \cdot \|\overline{BC}\| \cos ABC \text{ لدينا}$$

$$\cos ABC = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\|\overline{BA}\| \cdot \|\overline{BC}\|} = \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{لدينا: } \sin^2 ABC = 1 - \cos^2 ABC$$

$$\text{ومنه } \sin ABC = -\frac{3}{5} \text{ أو } \sin ABC = \frac{3}{5}$$

ب/ * حساب مساحة المثلث ABC ولتكن S_{ABC}

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{BA} \times \overline{BC} \times \sin ABC = \frac{1}{2} \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2} u a$$

ج/ * نبين أن $\vec{n}(1; 2; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

$$\text{بما أن } \vec{n} \cdot \overline{BC} = 1(2) + 2(0) - 2(1) = 0 \text{ وكذلك}$$

$$\vec{n} \cdot \overline{BA} = 1(2) + 2(-1) - 2(0) = 0$$

فإن $\vec{n}(1; 2; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

* استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

$$\text{لدينا } (ABC): x + 2y - 2z + d = 0$$

$$A \in (ABC) \text{ تكافئ } 3 + 2 + d = 0 \text{ تكافئ } d = -5$$

$$\text{ومنه: } (ABC): x + 2y - 2z - 5 = 0$$

د/ * نبين أن $ABCD$ رباعي وجوه:

نبين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوي (ABC)

$$n \in \mathbb{N}^*, b = 11n + 4 \text{ و } a = 5n + 2$$

$$11a - 5b = 11(5n + 2) - 5(11n + 4) = 55n + 22 - 55n - 20 = 2$$

ومنه $d/2$ إذن : $d \in D_2 = \{1; 2\}$

ب/ *تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون:

$$PGCD(a; b) = 2 \text{ لدينا } : PGCD(a; b) = 2$$

معناه 2 يقسم a و 2 يقسم b معناه 2 يقسم $b - 2a$

أي 2 يقسم $11n + 4 - 2(5n + 2)$ وبالتالي 2 يقسم n

ومنه $n = 2\alpha \ / \ \alpha \in \mathbb{N}^*$: الشكل من الشكل

ج/ *استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون

العددين a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق

من أجل $PGCD(a; b) = 2$ قيم $n = 2\alpha \ / \ \alpha \in \mathbb{N}^*$

ومنه : قيم n حيث $PGCD(a; b) = 1$ هي $n = 2\alpha + 1 \ / \ \alpha \in \mathbb{N}$

(3) *أ/ نبيين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$$n \in \mathbb{N}, B = 11n^2 + 15n + 4 \text{ و } A = 5n^2 + 7n + 2$$

$$B = (n+1)(11n+4) = b(n+1), A = (n+1)(5n+2) = a(n+1)$$

ومنه $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب/ *استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين

A و B :

$$PGCD(A; B) = PGCD(a(n+1); b(n+1)) = (n+1)PGCD(a; b)$$

ومنه نميز حالتين :

الحالة 1: إذا كان $PGCD(a; b) = 2$ معناه $n = 2\alpha \ / \ \alpha \in \mathbb{N}^*$

$$PGCD(A; B) = (2\alpha + 1)2 = 4\alpha + 2$$

الحالة 2: إذا كان $PGCD(a; b) = 1$ معناه $n = 2\alpha + 1 \ / \ \alpha \in \mathbb{N}$

$$PGCD(A; B) = (2\alpha + 1)1 = 2\alpha + 2$$

التمرين الثالث (05 نقاط)

1 تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \dots (1) \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2iz_1 + z_2 = -i + \sqrt{3} \dots (1) \\ \sqrt{3}z_1 + 2iz_1 - z_2 = i - i\sqrt{3} \dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) : $\sqrt{3}z_1 = \sqrt{3}(1-i)$ ومنه $z_1 = 1-i$

بالتعويض في (1) نجد : $z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$

$$z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ على الشكل الأسّي} :$$

$$\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ : *أ/ نبيين أن :}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})i}{2}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3}) \frac{(1 + \sqrt{3}i)}{2} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه :}$$

$$5x - 2z - 10 = 0 \text{ نضع } z = t \text{ (وسيط حقيقي) نجد}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5}t + 2 \\ y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases} \text{ إذن : } y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{2} \text{ و } x = \frac{2}{5}t + 2$$

ج/ *حساب $d(D; (Q))$ ثم استنتاج بدلالة m المسافة بين

$$D \text{ و } (\Delta) : d(D; (Q)) = \frac{|-4(0) + 2(0) + 5|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{2} : (\Delta)$$

بمأن (Q) و (ABC) متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$$d(D; (\Delta))^2 = d(D; (Q))^2 + d(D; (ABC))^2$$

$$\text{ومنه : } d(D; (\Delta)) = \sqrt{\frac{5}{4} + \left(\frac{2m+5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{16m^2 + 80m + 145}}{6}$$

(3) *أ/ تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي m - (S_m) سطح كرة

يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

$$\text{لدينا : } x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$$

ومنه : $x^2 + y^2 + (z - m)^2 = 9$ إذن : (S_m) سطح

كرة مركزها النقطة $D(0; 0; m)$ و نصف قطرها $r = 3$

ب/ *تعيين m حتى يكون المستوى (ABC) مماسا لسطح

الكرة (S_m) . (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني

$$d(D; (ABC)) = 3 \text{ أي أن : } \frac{2m+5}{3} = 3 \text{ ومنه : } m = 2$$

(4) معادلة المستوى (P) الموازي تماما للمستوي (ABC)

$$\text{ويعم (S_m) . لدينا : } (P) : x + 2y - 2z + d = 0$$

المستوي (P) مماس لـ (S_m) يعني :

$$|-4 + d| = 9 \text{ أي } d(D; (P)) = \frac{|-4 + d|}{3} = 3$$

ومنه : $d = 13$ أو $d = -5$ هو المستوى (ABC)

$$\text{إذن : } (P) : x + 2y - 2z + 13 = 0$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) *أ/ اثبات أن : $y = 4[11]$ ، $11x - 5y = 2$... (E)

$$11x - 5y = 2 \text{ يكافئ } 11x = 5y + 2 \text{ ومنه } 5y = 11x - 2 \text{ أي } 5y = -2[11]$$

$$\text{أي } 5y = 20[11] \text{ ومنه : } y = 4[11]$$

ب/ *استنتاج حلول المعادلة (E) :

$$y = 4[11] \text{ معناه } y = 11k + 4 \text{ مع } k \in \mathbb{Z} \text{ ، نعوض قيمة}$$

$$\text{في المعادلة (E) نجد : } x = 5k + 2$$

$$\text{ومنه : } S = \{(11k + 4; 5k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

(2) *أ/ تعيين القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a; b)$:

بالنسبة لمحور الفواصل ولدينا $A(1; -1)$ و $B'(2 + \sqrt{3}; -1)$ أي: AB' لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم معادلته $y = -1$ موازي لمحور الفواصل ومنه نجد:
 $z_c = \overline{z_a} = 1 + i$

أ/ إيجاد z_1 لاحقة مركز ثقل المستطيل $AB'BC$

$$z_1 = \frac{1 - i + 4 + 2\sqrt{3} + 1 + i}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \text{ ومنه } z_1 = \frac{z_a + z_b + z_{b'} + z_c}{4}$$

ب/ تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون

$f = ros$: $\frac{\pi}{3}$ و زاويته O ونسبته 2 وتشابه مباشر S تشابه مباشر مركزه O ونسبته k و زاويته θ أي ros تشابه مباشر مركزه O ونسبته k و زاويته $\theta - \frac{\pi}{6}$ ومنه: $k = 2$ و $\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ أي $\theta = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

ومنه عبارة التشابه S هي: $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ونكتب $z' = 2iz$

ب/ إيجاد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S :

مساحة صورة الدائرة (γ) هي S' حيث: $s' = k^2 s = 4\pi u a$

5/ إذا كان $S(M) = M'$ ، إيجاد طبيعة المثلث OMM' :

معناه $\frac{z'}{z} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\frac{z'}{z} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ أي $\left|\frac{z'}{z}\right| = 2$ و $(\overline{OM}; \overline{OM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

معناه $\|OM'\| = 2\|OM\|$ ومنه: المثلث OMM' قائم في O

ب/ تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي يكون من

أجلها: $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0$ ، $\overline{AM}(x-1; y+1)$ ، $\overline{AM}(z-z_a)$ ، $\overline{AM}(z'-z_a)$ و $\overline{AM}'(-2y-1; 2x+1)$ ومنه $\overline{AM}'(2iz-z_a)$ أي $\overline{AM}'(z'-z_a)$ و $\overline{AM} \cdot \overline{AM}' = 0$ معناه $(x-1)(-2y-1) + (y+1)(2x+1) = 0$ معناه $x+3y+2=0$

مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته $x+3y+2=0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

$f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = x - e + \ln\left(\frac{e^{2(x-e)} + 2}{e^{2(x-e)}}\right)$

$$= x - e + \ln(e^{2(x-e)} + 2) - \ln(e^{2(x-e)}) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

ب/ حساب النهايات $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

ج/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = \frac{1 - 2e^{-2(x-e)}}{1 + 2e^{-2(x-e)}}: \mathbb{R}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

*** استنتاج الشكل الأسّي للعدد z_b :**

$$z_b = z_a(1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ومنه } z_b = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}}$$

ج/ تعيين قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد

$$\left(\frac{z_b}{z_a}\right)^n \text{ تنتمي إلى المنصف الأول إن وجدت:}$$

$$\arg\left(\frac{z_b}{z_a}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ لدينا: } \left(\frac{z_b}{z_a}\right)^n = (1 + \sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$$

$$\arg\left(\frac{z_b}{z_a}\right)^n = \frac{n\pi}{3}[2\pi] \text{ أي: } k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ومنه } 4n - 12k = 3$$

أي $PGCD(12; 4) = 4$ ، $4n - 12k = 3$ لا تقسم 3 ومنه المعادلة لا تقبل حلول ان لا يوجد قيم لـ n تحقق المطلوب.

3/ إيجاد لاحقة النقط B' صورة النقط B بالدوران

r الذي مركزه النقط O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$

عبارة الدوران r من الشكل: $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}z$

$$z_{b'} = e^{-i\frac{\pi}{6}}z_b = e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_{b'} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{12}} = \overline{z_b} = 2 + \sqrt{3} - i$$

ب/ حساب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$ لدينا:

$$R = \frac{BB'}{2} = \frac{|z_{b'} - z_b|}{2} = \frac{|-2i|}{2} = 1, S = \pi R^2$$

ومنه: $s = \pi u a$

ج/ تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث:

$$\arg[(z - z_b)^2] = \arg(z_b) - \arg(z_{b'})$$

$$\arg(z - z_b) = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ومنه } 2\arg(z - z_b) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

$$(\overline{u}; \overline{BM}) = \frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ تفسيرها:}$$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (OB) ما عدا النقط B .

د/ تعيين z_c لاحقة النقط C حتى يكون الرباعي $AB'BC$

مستطيل:

$$\arg\left(\frac{z_c - z_{b'}}{z_c - z_b}\right) = \arg(z_a - z_{b'}) - \arg(z_b - z_{b'})$$

$$\arg\left(\frac{z_c - z_{b'}}{z_c - z_b}\right) = \arg(1 - i - 2 - \sqrt{3} + i) - \arg(2i) = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\arg\left(\frac{z_c - z_{b'}}{z_c - z_b}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه نجد:}$$

$$z_c = 1 + i \text{ ومنه } \begin{cases} x_c = 1 \\ y_c = 1 \end{cases} \text{ معناه } \overline{B'B} = \overline{AC}$$

لدينا $z_{b'} = \overline{z_b}$ معناه BB' متناظرتان

حيث m وسيط حقيقي.

$$y = mx - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2} \text{ معناه}$$

$$m \left(x - e - \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2} - y = 0 \text{ معناه}$$

$$x - e - \frac{\ln 2}{2} = 0 \text{ و } \frac{\ln 2}{2} - y = 0 \text{ ومنه: جميع المستقيمات}$$

$$(D_m) \text{ تشمل النقطة الثابتة } A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$$

ب* مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط

تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) :

$$\text{المستقيم } (D_m) \text{ يدور حول النقطة الثابتة } A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$$

إذا كان $m = 1$ فإن (D_m) هو (D) لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m = -1$ فإن (D_m) هو (D') لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m = 0$ فإن (D_m) هو $(D_0): y = \ln \sqrt{2}$ لا توجد نقط

تقاطع

إذا كان $m \in]-1; 1[$ فإنه لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

(5) * التفسير الهندسي العدد I : هو مساحة الحيز المستوي

المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (D) والمستقيمين

$$\text{الذيهم معادلتيهما } x = \ln \sqrt{2} + e, x = \ln \sqrt{3} + e$$

$$\text{حساب العدد } I_1: I_1 = \int_0^1 \ln(1+X) dX \text{ بالمكاملة بالتجزئة}$$

$$\text{بوضع: } u(X) = \ln(1+X), u'(X) = \frac{1}{1+X}$$

$$v(X) = X, v'(X) = 1$$

$$I_1 = [X \ln(1+X)]_0^1 - \int_0^1 \frac{X+1-1}{X+1} dX$$

$$= [X \ln(1+X)]_0^1 - \int_0^1 1 dX + \int_0^1 \frac{1}{X+1} dX$$

$$= [X \ln(1+X) - X + \ln(1+X)]_0^1 = \ln 4 - 1$$

$$\text{ب* نبيّن أن } 0 \leq I_n \leq \ln 2: \text{ لدينا } I_n = \int_0^1 \ln(1+X^n) dX$$

$$0 \leq \ln(X^n + 1) \leq \ln 2 \text{ معناه } 1 \leq X^n + 1 \leq 2$$

$$\text{ومنه: } 0 \leq I_n \leq \ln 2 \text{ لأن } 0 \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX \leq \int_0^1 \ln 2 dX$$

ج* تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq X \leq 1 \dots (1) \\ 0 \leq X^n \leq 1 \end{array} \right. \text{ بضرب أطراف المتباينة (1) في } X^n \text{ نجد}$$

$$f'(x) = 0 \text{ معناه } 1 - 2e^{-2(x-e)} = 0 \text{ معناه } x = e + \ln \sqrt{2}$$

| | | | |
|---------|-----------|--------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $e + \ln \sqrt{2}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | — | ○ | + |

الدالة f متزايدة تماما على $[e + \ln \sqrt{2}; +\infty[$

الدالة f متناقصة تماما على $] -\infty; e + \ln \sqrt{2}]$

تشكيل جدول تغيراتها :

| | | | |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $\ln 2/2 + e$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | — | ○ | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $3 \ln 2/2 + e$ | $+\infty$ |

(2) * نبيّن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D')

معادلتاهما: $y = -x + \ln 2 + e$ و $y = x - e$ عند $+\infty$

وعند $-\infty$ على الترتيب: بما أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - e)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + e + \ln 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2] = 0$$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب* دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

$$\text{لدينا: } f(x) - (x - e) = \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$$

$$\ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) > \ln 1 = 0 \text{ معناه } 1 + 2e^{-2(x-e)} > 1$$

ومنه: $f(x) - (x - e) > 0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D)

$$\text{لدينا: } f(x) - (-x + e + \ln 2) = \ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2$$

$$\ln(2 + e^{2(x-e)}) > \ln 2 \text{ معناه } 2 + e^{2(x-e)} > 2$$

ومنه: $f(x) - (-x + e + \ln 2) > 0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D')

من أجل كل عدد حقيقي x

$$\text{ج* نبيّن أن المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$$

هو محور تناظر للمنحنى (C_f) :

من أجل كل x من \mathbb{R} من $2 \left(\frac{\ln 2}{2} + e \right) - x$ لدينا،

$$f \left(2 \left(\frac{\ln 2}{2} + e \right) - x \right) = f(\ln 2 + 2e - x)$$

$$= -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)}) = f(x)$$

ومنه: $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

(3) رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f) :

(4) * نبيّن أن جميع المستقيمت (D_m) تشمل النقطة الثابتة

$$(D_m): y = mx - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2} : A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$$

(6) باستعمال: $\ln(1+X) \leq X$ من اجل كل $X \in]0; +\infty[$

/* استنتاج أن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2+\epsilon}}^{\ln \sqrt{3+\epsilon}} 2e^{-2(x-\epsilon)} dx - 1 + \ln 4$

$\ln(1+X) \leq X$ من اجل كل $X \in]0; +\infty[$

لدينا: $1 + 2e^{-2(x-\epsilon)} > 0$ بوضع: $X = 1 + 2e^{-2(x-\epsilon)}$ نجد:
وبالتالي $0 \leq \ln(1 + 2e^{-2(x-\epsilon)}) \leq 2e^{-2(x-\epsilon)}$

$$0 \leq \int_{\ln \sqrt{2+\epsilon}}^{\ln \sqrt{3+\epsilon}} \ln(1 + 2e^{-2(x-\epsilon)}) dx \leq \int_{\ln \sqrt{2+\epsilon}}^{\ln \sqrt{3+\epsilon}} 2e^{-2(x-\epsilon)} dx$$

ومنه: $0 \leq -1 + \ln 4 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2+\epsilon}}^{\ln \sqrt{3+\epsilon}} 2e^{-2(x-\epsilon)} dx - 1 + \ln 4$

ان: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2+\epsilon}}^{\ln \sqrt{3+\epsilon}} 2e^{-2(x-\epsilon)} dx - 1 + \ln 4$

ب) اعطاء حصر للعدد: $I + I_1$

$$0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2+\epsilon}}^{\ln \sqrt{3+\epsilon}} 2e^{-2(x-\epsilon)} dx - 1 + \ln 4$$

$$\int_{\ln \sqrt{2+\epsilon}}^{\ln \sqrt{3+\epsilon}} 2e^{-2(x-\epsilon)} dx = - \int_{\ln \sqrt{2+\epsilon}}^{\ln \sqrt{3+\epsilon}} -2e^{-2(x-\epsilon)} dx = - [e^{-2(x-\epsilon)}]_{\ln \sqrt{2+\epsilon}}^{\ln \sqrt{3+\epsilon}} = \frac{1}{6}$$

ومنه: $0 \leq I + I_1 \leq \frac{1}{6} - 1 + \ln 4$

$$0 \leq X^{n+1} + 1 \leq X^n + 1 \text{ أي } 0 \leq X^{n+1} \leq X^n$$

$$0 \leq \ln(X^{n+1} + 1) \leq \ln(X^n + 1) \text{ أي } n \in \mathbb{N}^*$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(X^{n+1} + 1) dX \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX$$

ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على \mathbb{N}^*

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر ($0 \leq I_n \leq \ln 2$)

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

ج) تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$$\begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \dots (1) \\ 0 \leq X^n \leq 1 \end{cases} \text{ بضرب اطراف المتباينة (1) في } X^n \text{ نجد}$$

$$0 \leq X^{n+1} + 1 \leq X^n + 1 \text{ أي } 0 \leq X^{n+1} \leq X^n$$

$$0 \leq \ln(X^{n+1} + 1) \leq \ln(X^n + 1) \text{ أي } n \in \mathbb{N}^*$$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(X^{n+1} + 1) dX \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX$$

ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على \mathbb{N}^*

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر ($0 \leq I_n \leq \ln 2$)

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

(3) رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f) .

