اختبار في مادة الرياضيات — المـدة: 04 ساعات و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين01:

1)أثبت أن العدد 251 عدد أولي.

2)حلل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية .

أ)استنتج كل الأعداد الأولية التي مكعب كل منها يقسم العدد 2008.

ب) عين الأعداد الطبيعية a و b بحيث: $m^3+35d^3=2008$

علما أن: $m=PPCM(a;b)$ و $d=PGCD(a;b)$.

التمرين02:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$ و $u_0=\frac{1}{8}$

1) أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة 8cm)، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (C) الممثل للدالة f المعرفة على $[0;2]$ بـ : $f(x)=x(2-x)$

2)أ-باستعمال الرسم السابق،مثل على حامل محور الفواصل،دون حساب كلا من u_0، u_1، u_2، u_3

ب - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

3) أ- برهن بالتراجع أنه لكل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة استنتج أن (u_n) متقاربة ، ما هي نهايتها ؟

4) 3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(1-u_n)$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب-استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

5) أ) احسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n=(1-u_0)(1-u_1)........(1-u_n)$، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$

التمرين03:

نعتبر نرد متوازن على شكل رباعي وجوه منتظم مرقم من1 إلى 4.

I- نرمي هذا النرد مرتين متتاليتين ونعتبر الأحداث التالية:

A "مجموع الرقمين المحصل عليهما زوجي ".

B "الرقم الأول المحصل عليه 4 ".

C "الرقم المحصل عليه في الرمية الأول أكبر تماما من الرقم المحصل عليه في الرمية الثانية ".

1) احسب الاحتمالات التالية: أ) $P_A(B)$ ؛ ب) $P_B(C)$ ؛ جـ) $P_A(C)$.

2) أ)هل الحادثتين A و B مستقلتين ؟ب)هل الحادثتين A و C مستقلتين ؟جـ)هل الحادثتين B و C مستقلتين؟

II- يدفع لاعب $2D$ ثم يرمي هذا النرد مرتين متتاليتين.

- إذا ظهر نفس الرقم في الرميتين يربح بالدينار (D) مجموع الرقمين.
- إذا ظهر رقم 4 مرة واحدة، فيربح اللاعب بالدينار الرقم الظاهر في الرمية الأخرى.
- في بقية الحالات يعتبر اللاعب خاسرا.

نسمي G المتغير العشوائي المعرف بالربح الجبري للاعب.

1) عين القيم الممكنة لـ G .

2) عين قانون احتمال G .

3) • احسب $E(G)$ الأمل الرياضي لـ G. • هل هذه اللعبة عادلة ؟

التمرين04:

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+\frac{1}{2})-2x$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=\ln(1-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x})$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) احسب $g(-\ln 2)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$.

II-نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\ln\left(2e^{2x}-2e^{x}+1\right)-\ln 2$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ماذا تستنتج ؟

ب)استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ ، ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D)

2) أ) بين $f'(x)=e^{x-f(x)}(2e^{x}-1)$ حيث f' مشتق الدالة f .

ب) ادرس إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

جـ) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

3) أ) عين α فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل.

ب) ارسم (Δ) و (C_f).

4) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\ln(\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}+1)$ و (C_h) تمثيلها البياني.

أ) عين قيمة β التي تحقق $h(x)=f(x-\ln 2)+\beta$.

ب) استنتج كيفية إنشاء (C_h) انطلاقا من المنحنى (C_f).

إعداد الأستاذ بالعبيدي محمد العربي

الموضوع الثاني

التمرين01:

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7

2) برهن أنه من أجل كل n من N يكون العدد: $\left(2\times 2018^{6n+4}+1438^{6n+1}\right)$ قابلا للقسمة على 7

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=2\times 3^n+3\times 4^n$

أ) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

ب) ما هي قيّم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها s_n قابلا للقسمة على 7 ؟

التمرين02:

ليكن α عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;1[$

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0=2$ و $U_{n+1}=\dfrac{(1+\alpha)U_n-\alpha}{U_n}$

1) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $U_n\geq 1$.

ب- بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة .

جـ- استنتج أن (U_n) متقاربة واحسب نهايتها .

2) لتكن (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n=\dfrac{U_n-1}{U_n-\alpha}$

أ- بيّن أن (V_n) متتالية هندسية أساسها α

ب- اكتب عبارة V_n بدلالة n و α واستنتج عبارة U_n بدلالة n و α.

جـ - تحقق من نتيجة السؤال 1) جـ) وذلك بحساب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

التمرين03:

أ- g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{2}{x^2+1}$

1- ادرس تغيرات الدالة g.

2- بيّن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $0,5\prec\alpha\prec 0,6$ يحقق: $g(\alpha)=0$ واستنتج إشارة $g(x)$

ب- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right);\ x\succ 0$ و $f(0)=0$

نرمز بـ (C) للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول 5cm

1- أ) احسب نهاية $x.f(x)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

ب) استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ و فسّر النتيجة بيانيا.

2- أ) أثبت أن : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

ب) بيّن أنه من أجل كل $x \in]0;+\infty[$ فإن : $f'(x)=g(x)$

جـ) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x}$ أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة .

د) بيّن أن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=0$ ماذا تعني هذه النتيجة بالنسبة للدالة f ؟

3- شكل جدول تغيرات الدالة f

4- ارسم بعناية المنحني (C) الممثل للدالة f

5- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=f(e^x)$

أ-ادرس تغيرات الدالة h .

ب-أنشئ التمثيل البياني للدالة h.

التمرين04:

صندوق A يحتوي على4 كريات حمراء و 6 كريات سوداء و صندوق B يحتوي على كرية واحدة حمراء و 9 كريات سوداء مع أن كل الكريات متساوية الاحتمال .

I) يرمي لاعب زهرة نرد غير مزيفة و مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة في الهواء .

ـ إذا تحصل على الرقم1 يسحب كرة واحدة من الصندوقA .

ـ إذا لم يتحصل على الرقم1 فيسحب كرة واحدة من الصندوق B .

1) شكل شجرة الاحتمالات لهذه التجربة .

2) نسمي R الحادثة : "الحصول على كرية حمراء" بين أن $P(R)=0{,}15$

3) تحصل اللاعب على كرية حمراء ، بين أن احتمال أن تكون من الصندوق B أكبر أو تساوي من احتمال أن تكون من الصندوق A

II) اللاعب يكرر هذه اللعبة مرتان (اللعبة المنصوص عليها في الجزء في نفس الشروط المتماثلة و المستقلة عن بعضها بمعنى يعيد الصندوقين إلى تعدادها الأول بعد اللعبة الأولى)

ليكن x عدد طبيعي غير معدوم ، بعد اللعبتين يتحصل اللاعب على نقطة عن كل كرية حمراء و يخسر نقطة عن كل كرية سوداء .

نرمز بـ G إلى قيمة الربح أو الخسارة بعد اللعبتين .

1) بين أن G يأخذ القيم $2x$, $x-2$, -4.

2) أوجد قانون الاحتمال و أحسب الأمل الرياضياتي $E(G)$ للمتغير العشوائي G بدلالة x.

3) ما هي أصغر قيمة لـ x حتى تكون اللعبة مربحة .

إعداد الأستاذ بالعبيدي محمد العربي