الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مواضيع لتحضير بكالوريا 2020 من إعداد الأستاذ: زروقي عيسى

الموضـــــــوع الثـــــــاني

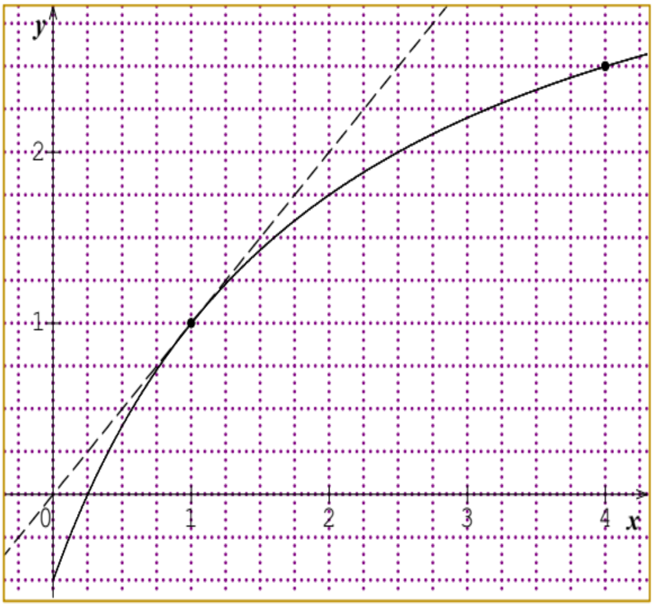
التمرين الأول:

بين صحة أو خطأ كل من الجمل التالية مع التعليل:

1. مهما يكن العدد الحقيقي : $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.
2. $\ln\left(3e^{\pi}\right)=\pi+\ln 3$.
3. الدالة $x\mapsto e^{-2x}$ هي جل المعادلة التفاضلية $y'=2y$.
4. المتراجحة $e^{1-2x}\succ e^{x+1}$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$.
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+4\right)=2\ln 2$

التمرين الثاني:

f معرفة على $[0;4]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{4x-1}{x+2}$ و(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس، أنظر الشكل.



1. أستنتج اتجاه تغير f ، وتحقق أن المنصف الأول يمس المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1 .
2. نعرف المتتالية (u_n) بـ :

$$\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=f(n),n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ– أنقر الشكل ومثل على محور الفواصل الحدود: u_0، u_1، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n) (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء .)

ب‒ أعط تخمينا فيما يخص اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، وتخمينا حول تقاربها .

3. أ ‒ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \prec u_n \leq 4$

ب‒ أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة ، واستنتج أنها متقاربة .

4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

أ‒ أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها ، وأحسب حدها الأول .

ب‒ أكتب بدلالة n عبارة v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

ت‒ أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

ث‒ أثبت أن من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots\ldots\ldots + u_n v_n = \dfrac{n+1}{6}(8+n)$

التمرين الثالث:

☺ لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

1. أدرس تغيرات الدالة g.
1. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0,38;-0,37[$.
2. استنتج إشارة $g(x)$.

☺ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس (وحدة الطول)

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$
2. أدرس تغيرات الدالة f .
3. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
4. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).
5. بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .
6. بين أن : $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$.

انتهـــى بالتوفيـق

﴿ ترقبوا الحلول قريبا إن شاء الله ﴾

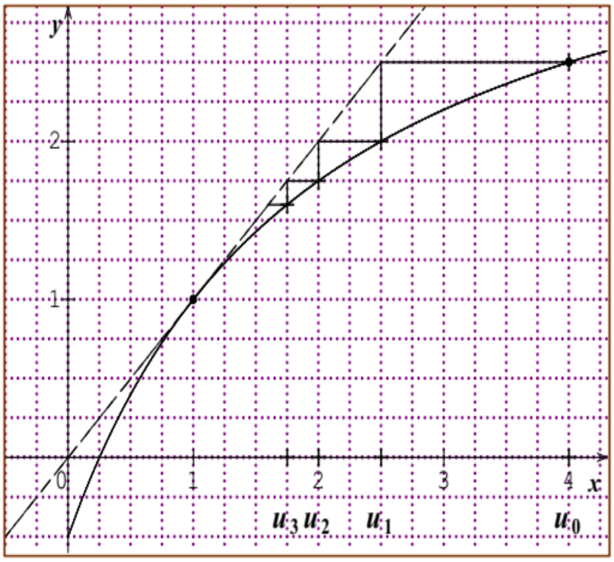
حل الموضــــــــوع الثـــــــاني

حل التمرين الأول:

تبين صحة أو خطأ الجمل مع التعليل:

1. خطأ لأن : $\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{x}\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{e^{x}\left(e^{x}+e^{-x}\right)}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
2. صحيح لأن : $\ln\left(3e^{\pi}\right)=\ln 3+\ln e^{\pi}=\ln 3+\pi$ لأن : $\ln e^{\pi}=\pi$
3. خطأ لأن : حلول أي معادلة تفاضلية $y'=2y$ هي من الشكل: $y=f(x)=ke^{2x}$ حيث k عدد حقيقي كيفي .
4. خطأ لأن: المتراجحة $e^{1-2x}\succ e^{x+1}$ مجموعة حلولها هي : $S=\left]-\infty;0\right[$
5. صحيح لأن : $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^{x}+4\right)=\ln 4=\ln 2^{2}=2\ln 2$

حل التمرين الثاني:



f معرفة على $[0;4]$ كما يلي: $f(x)=\frac{4x-1}{x+2}$ و(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس، أنظر الشكل.

1. إستنتاج اتجاه تغير f ، والتحقق أن المنصف الأول يمس المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

الدالة f متزايدة ، نثبت أن المعادلة تقبل العدد 1 حلا مضاعفا

لدينا $f(x)=x$ تكافئ $4x-1=x(x+2)$ ويكافئ $4x-1=x^{2}+2x$ ويكافئ $x^{2}-2x+1=0$ أي $(x-1)^{2}=0$ ومنه

$\boxed{x=1}$

2. نعرف المتتالية (u_n) بـ :

$$\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=f(n), n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ– نقل الشكل وتمثيل الحدود: u_0، u_1، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n) (أنظر الشكل)

ب– إعطاء التخمين فيما يخص اتجاه تغير المتتالية (u_n) والتخمين حول تقاربها .

من الشكل لدينا : $u_3 \prec u_2 \prec u_1 \prec u_0$ ومنه نخمن ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما

3. أ – البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \prec u_n \leq 4$

لدينا أولا $1 \leq (u_0 = 4) \leq 4$ ومنه محققة ثانيا نفرض صحة الخاصية $1 \prec u_n \leq 4$ ونبرهن صحة الخاصية $1 \prec u_{n+1} \leq 4$

لدينا $(1 \prec u_n \leq 4)$ فرضية التراجع والدالة f متزايدة على المجال $[0;4]$ فهي متزايدة على المجال $]1;4]$ ومنه :

$f(1) \prec f(u_n) \leq f(4)$ أي : $1 \prec u_{n+1} \leq 2,5 \leq 4$ ومنه : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \prec u_n \leq 4$

ب– إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة ، واستنتاج أنها متقاربة .

نحسب الفرق : $u_{n+1} - u_n$: $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$ ونعلم أن $1 \prec u_n \leq 4$ أي

$0 \prec 3 \prec u_n + 2 \leq 6$ و $-(u_n - 1) \leq 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \prec 0$ أي (u_n) متناقصة ولدينا (u_n) محدودة فهي متقاربة

4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

أ– إثبات أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحساب حدها الأول .

لنثبت أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ ثابت :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2}{4u_n - 1 - u_n - 2} - \frac{1}{u_n - 2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{u_n - 1}\left(\frac{u_n + 2}{3} - 1\right) = \frac{1}{u_n - 1}\left(\frac{u_n - 1}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

إذن متتالية هندسية أساسها $r = \boxed{\frac{1}{3}}$ وحدها الاول هو $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4 - 1} = \boxed{\frac{1}{3}}$

ب– كتابة عبارة v_n بدلالة n ، واستنتاج عبارة u_n بدلالة n .

$$v_n = v_0 + nr = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n = \boxed{\frac{1}{3}(1+n)}$$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n: نعوض عبارة في ونبسط : $v_n=\frac{1}{u_n-1}\Leftrightarrow v_nu_n-v_n=1\Leftrightarrow u_n=\frac{1+v_n}{v_n}$ ومنه نعوض

$u_n=\frac{1+\frac{1}{3}(1+n)}{\frac{1}{3}(1+n)}$ ومنه $\boxed{u_n=\frac{4+n}{1+n}}$

ت- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4+n}{1+n}=\boxed{1}$

ث- إثبات أن من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_0v_0+u_1v_1+\dots\dots\dots+u_nv_n=\frac{n+1}{6}(8+n)$

لدينا مما سبق من أجل $n\in\mathbb{N}$: $v_nu_n=1+v_n$

ومنه $u_0v_0+u_1v_1+\dots\dots\dots+u_nv_n=\underbrace{1+1+\dots+1}_{n\text{ مرة}}+\underbrace{(v_0+v_1+\dots+v_n)}_{\text{حسابية}}$

ومنه $u_0v_0+u_1v_1+\dots\dots\dots+u_nv_n=(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(1+n)\right)$

ومنه $u_0v_0+u_1v_1+\dots\dots\dots+u_nv_n=\frac{1}{6}(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)(8+n)$ وهو المطلوب

التمرين الثالث

☺ لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$

1. دراسة تغيرات الدالة g.

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{-x}+2\right]=\boxed{-\infty}$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{-x}+2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}\left(\frac{x}{e^{x}}-e^{-x}+2\right)=\boxed{2}$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، الدالة g قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة هي : $g'(x)=(2-x)e^{-x}$ و منه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $(2-x)$ وجدول تغيراتها يعطى كما يلي :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e^{-2}+2$	$\searrow$	2

2. تبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0,38;-0,37[$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;2[$ ومنه على المجال $]-0,38;-0,37[$ وبما أن $g(-0.38)\times g(-0.37)\prec 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0,38;-0,37[$.

3. استنتج إشارة $g(x)$.

نلخص النتائج في الجدول :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

☺ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$

1. التبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

لدين من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=2-e^{-x}+xe^{-x}=(x-1)e^{-x}+2=g(x)$

2. دراسة تغيرات الدالة f .

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ولدينا أيضا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x+1-xe^{-x})=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3. التبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x-1]=\lim_{x\to+-\infty} -xe^{-x}=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $(+\infty)$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(2x+1)$ ومنه لدينا :

$[f(x)-(2x+1)]=-xe^{-x}$ ومنه إشارة الفرق هي عكس إشارة x .

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)-(2x+1)$	$+$ $\|\|$ $-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ) $\|\|$ (C_f) تحت (Δ)

.5 إثبات أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''(x)=g'(x)$ ومنه

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$f''(x)$	$+$ 0 $-$

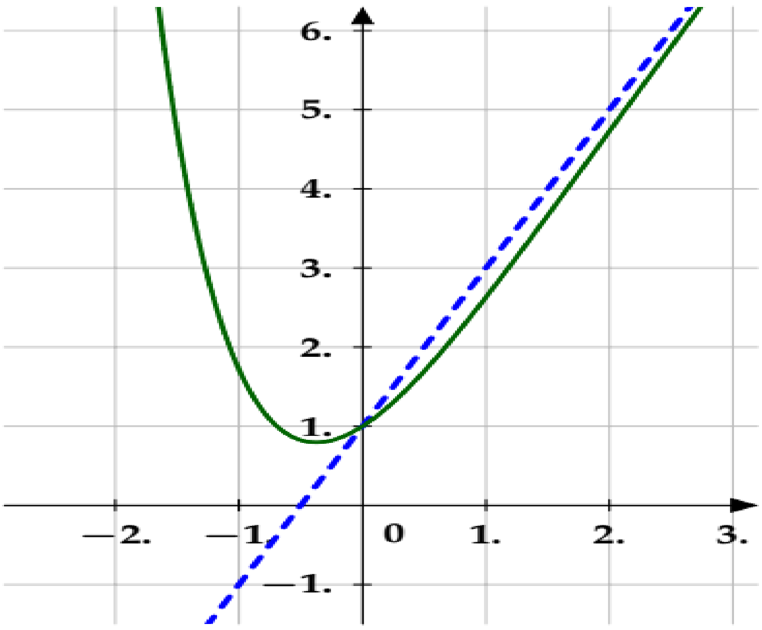
نلاحظ من الجدول أن $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة $\left(2;5-\frac{2}{e^2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى

.6 إثبات أن : $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.

لدينا $g(\alpha)=0$ تكافئ $(\alpha-1)e^{-\alpha}+2=0$ نستخرج قيمة $e^{-\alpha}$ ونعوضها في الدالة $f(\alpha)$ فتصبح :

$$f(\alpha)=2\alpha+1-\alpha e^{-\alpha}=2\alpha+1+\frac{2\alpha}{\alpha-1}=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$$

ومنه نستطيع رسم (C_f) كما يلي (إجابة إضافية)



انتهـــى   بالتوفيـق