

التمرين الأول (08 ن): توجد إجابة واحدة صحيحة لكل حالة حددها مع التعليل:

0	1	$+\infty$	1. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$ تساوي
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	2. إذا كانت h دالة تحقق لكل عدد حقيقي x موجب تماما $e^{-x} \leq h(x) \leq 2e^{-x}$ و f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ فان $f(x) = xe^x h(x)$:
$+\infty$	$-f'(2)$	$f'(2)$	3. إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند القيمة 2 فان $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+2h)}{2h}$ تساوي
$f(x) = -e^{-2x} + 1$	$f(x) = -e^{-2x} - 1$	$f(x) = e^{-2x} - 1$	4. حل المعادلة التفاضلية $y' + 2y - 2 = 0$ الذي يحقق $f(0) = 0$ هو f حيث:
\mathbb{R}	$[1; +\infty[$	$]-\infty; 0]$	5. مجموعة الحلول في \mathbb{R} ، للمترابحة $e^x - e^{-x} \leq 0$ هي

التمرين الثاني (12 ن):

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = (-x + 2)e^x - 2$

- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. (قبل ان $\lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = 0$)
- ادرس اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث: $1.5 < \alpha < 1.6$
- احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{e^x - 1} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (قبل ان $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty$)
- ادرس استمرارية وقابلية الاشتقاق للدالة f عند القيمة 0، ثم فسر النتائج هندسيا.
- أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{0\}$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$
- بين أن: $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

5. انشئ (C_f) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ على المجال $[-1; +\infty[$

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع																						
المجموع	جزاة																								
8		<p>التمرين الأول:</p> <p>1. 0 (نهاية مركب دالتين) لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$</p> <p>2. $+\infty$ (نهاية بالخصر) لأن: $e^{-x} \leq h(x) \leq 2e^{-x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$</p> <p>3. $-f'(2)$ لأن: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+2h)}{2h} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t) - f(2)}{t} = -f'(2)$</p> <p>4. $f(x) = -e^{-2x} + 1$ لأن $f(0) = 0$ و $f'(x) + 2f(x) - 2 = 0$</p> <p>5. $S =]-\infty; 0]$ لأن: مجموعة التعريف للمتراجحة $e^x - e^{-x} \leq 0$ هي \mathbb{R} و $e^x - e^{-x} \leq 0$</p> <p>تكافئ أن: $e^{2x} - 1 \leq 0$ تكافئ أن: $x \leq 0$ ومنه نجد أن: $S =]-\infty; 0]$</p>	الدوال العددية																						
12	5	<p>التمرين الثاني:</p> <p>I.</p> <p>1. حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$</p> <p>2. دراسة اتجاه تغير الدالة g:</p> <p>حساب $g'(x) = (1-x)e^x$: دراسة إشارة $g'(x)$:</p> <p>من أجل كل x من $[1; +\infty[$ ، لدينا $g'(x) \leq 0$</p> <p>من أجل كل x من $]-\infty; 1]$ ، لدينا $g'(x) \geq 0$</p> <p>تشكيل جدول تغيرات الدالة g:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td></td> <td>$+$ 0 $-$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>-2</td> <td>e^{-2}</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> <p>3. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $1.5 < \alpha < 1.6$</p> <p>الدالة g مستمرة على \mathbb{R} و $g(1.5) \times g(1.6) < 0$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $1.5 < \alpha < 1.6$.</p> <p>4. حساب $g(0)$ ، مع استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}:</p> <ul style="list-style-type: none"> $g(0) = 0$ إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}: <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>α</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>$-$</td> <td>0</td> <td>$+$ 0 $-$</td> <td>$-$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	1	$+\infty$	$g'(x)$		$+$ 0 $-$		$g(x)$	-2	e^{-2}	$+\infty$	x	$-\infty$	0	α	$+\infty$	$g(x)$	$-$	0	$+$ 0 $-$	$-$	الدوال العددية
x	$-\infty$	1	$+\infty$																						
$g'(x)$		$+$ 0 $-$																							
$g(x)$	-2	e^{-2}	$+\infty$																						
x	$-\infty$	0	α	$+\infty$																					
$g(x)$	$-$	0	$+$ 0 $-$	$-$																					

1. حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. دراسة استمرارية وقابلية الاشتقاق للدالة عند القيمة 0 :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$

إذن الدالة f مستمرة عند القيمة 0

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند القيمة 0

التفسير الهندسي : (C_f) لا ينقطع عند النقطة 0 و (C_f) يقبل مماسا عند النقطة 0 معامل توجيهه $f'(0) = 1$

1

$f'(x) = \left(\frac{x^2}{e^x - 1} \right)' = \frac{2x(e^x - 1) - (e^x)(x^2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{x((2-x)e^x - 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال \mathbb{R} ، مع تشكيل جدول تغيرات الدالة f دراسة إشارة $f'(x)$:

من اجل كل x من $[\alpha; +\infty[$ لدينا $f'(x) \leq 0$ ،
من اجل كل x من $]-\infty; \alpha]$ لدينا $f'(x) \geq 0$ ،
جدول تغيرات الدالة f

1

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$			

4. تبين أن $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$ ، ثم استنتاج حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $g(\alpha) = 0$ ومنه نجد $e^\alpha = \frac{2}{2 - \alpha}$

و $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1}$ بتعويض بقيمة e^α نجد أن : $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$

استنتاج حصر $f(\alpha)$: $0.6 < f(\alpha) < 0.8$

5. إنشاء (C_f) في المعلم (j, \bar{i}, j) على المجال $[-1; +\infty[$:

1

