

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر المستقيمين (d) و (d') المعرفين كمايلي:

$$(d') : \begin{cases} x = 4 + 3t' \\ y = 3 + t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases} ; t' \in \mathbb{R} , \quad (d) : x - 2 = \frac{y - 1}{2} = 1 - z$$

- (1) أكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم (d) ، ثم بين أن المستقيمين (d) و (d') ليسا من نفس المستوي.
(2) أ* / أوجد المعادلة الديكارتيّة للمستويين (p_1) و (p_2) اللذين يشملان النقطة $A(4; -7; 5)$.
حيث المستوي (p_1) يحوي المستقيم (d) و المستوي (p_2) يحوي المستقيم (d') .

$$(\Delta) : \begin{cases} x = \frac{-1}{11} + 9\alpha \\ y = 3 - 22\alpha \\ z = 11\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \text{ معرف بـ: } \Delta \text{ مستقيم وفق مستقيم } (\Delta) \text{ معرف بـ: } \Delta$$

- (3) لتكن $B \left(\frac{-1}{11}; 3; 0 \right)$ نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (Q) ذو المعادلة: $11x + y - z = 2$.

- أ* / أوجد إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q) .
ب* / استنتج المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على المستوي (Q) .

$$(4) (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M(x, y, z) \text{ من الفضاء تحقق: } \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$$

أ* / عين طبيعة المجموعة (Γ) محددًا عناصرها المميزة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

A_0 و B_0 نقطتان من المستوي حيث: $A_0B_0 = 8$ (الوحدة هي السنتيمتر) ، ليكن S التشابه المباشر الذي

مركزه النقطة A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$.

نعرف متتالية النقط (B_n) كمايلي: $B_{n+1} = S(B_n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .

- (1) أنشئ النقط B_1, B_2, B_3, B_4 .
- (2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n المثلثان $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان.
- (3) نعرف متتالية (u_n) بـ : $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .
- أ* أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
- ب* أكتب عبارة u_n بدلالة n .
- ج* نضع المجموع: $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، أحسب δ_n بدلالة n ثم أوجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n$
- (4) أ* حل في $\square \times \square$ المعادلة : $3x - 4y = 2$
- ب* ليكن (Δ) المستقيم العمودي على المستقيم (A_0B_0) في النقطة A_0 .
- * جد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \square المعادلة ذات المجهول z :
- $$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0 \quad (E)$$
- أ* بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0$.
- ب* حل في \square المعادلة (E) .
- (2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C, D لواحقتها على الترتيب : $z_A = -1, z_B = 2 + i\sqrt{3}, z_C = \bar{z}_B, z_D = 3$.
- أ* عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا.
- ب* عين طبيعة المثلث ABC .
- (3) أ* أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.
- ب* أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .
- (4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحتقتها z تحقق: $z + 1 = 2\sqrt{3}k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يسمح المجال $[0; +\infty[$.
- أ* عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overline{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ) .
- (5) أ* عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $-\overline{CA} + 2\overline{CB} + \alpha \overline{CD} = \vec{0}$.
- ب* عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|-\overline{AM} + 2\overline{BM} - 3\overline{DM}\| \leq 2\|\overline{BM} - \overline{CM}\|$.
- ج* استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(1) $g(x) = x^2 e^x$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 e^x$.
أ* / أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

ب* / استنتج أنه : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$ و إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$
(2) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

h دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3e$. (C_h) تمثيلها البياني (أنظر الملحق)
أ* / أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ب* / بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، ثم احسب $f'(1)$.
ج* / شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

(3) أ* / بين أن المعادلة: $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حلين α و β حيث: $1.5 < \beta < 1.6$ و $0.5 < \alpha < 0.6$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين .
ب* / أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) .

ج* / بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته .
(4) أ* / أرسم (T) و (C_f) . (الملحق يعاد مع ورقة الإجابة)

ب* / m عدد حقيقي موجب تماما ، أوجد قيمة m حتى تقبل المعادلة (E) حلين متميزين:
 $(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$

(5) أ* / بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$.

ب* / ليكن العدد λ من المجال $]0; 1[$ ،

$A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_h) و (C_f) و المستقيمين اللذين معادلتهما :
 $x = \lambda$ و $x = 1$.

* استنتج $A(\lambda)$ (مقدرة بوحدة المساحة) ، ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط $C(3; 2; 1)$ ، $B(1; 2; 0)$ ، $A(3; 1; 0)$

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha + \beta \\ y = \frac{3}{2} - 4\alpha + 2\beta \\ z = -5\alpha \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

و $D(0; 0; m)$ حيث m عدد حقيقي موجب، (Q) مستوي معرف بـ:

1) أ* أحسب الجداء السلمي $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\sin \widehat{ABC}$ و $\cos \widehat{ABC}$.
ب* أحسب مساحة المثلث ABC .

ج* بين أن شعاع ناظمي للمستوي (ABC) $\vec{n}(1; 2; -2)$ ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

د* بين أن $ABCD$ رباعي وجوه و أن حجمه: $V = \frac{2m+5}{6} uv$

2) أ* بين أن: (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية: $-2x + y = \frac{-5}{2}$

ب* استنتج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان و أنهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيط.

ج* أحسب $d(D; (Q))$ ثم استنتج بدلالة m المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ)

3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$

أ* بين أنه من اجل عدد حقيقي m فان (S_m) سطح كرة يتعين مركزها ونصف قطرها.

ب* عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m) .

4) أكتب معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) و يمس سطح الكرة (S_m) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x - 5y = 2$

أ* أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[11]$.

ب* استنتج حلول المعادلة (E) .

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع: $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$.

أ* عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ب* عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a; b) = 2$.

ج* استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $A = 5n^2 + 7n + 2$ و $B = 11n^2 + 15n + 4$.

أ* بين أن العدد $(n + 1)$ يقسم كل من العددين A و B .

ب* استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \end{cases} \quad (1) \text{ عين العددين المركبين } z_1 \text{ و } z_2 \text{ حيث:}$$

(2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات

$$z_A = 1 - i \text{ و } z_B = 2 + \sqrt{3} + i.$$

أ/* اكتب z_A على الشكل الأسّي.

ب/* بين أن: $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد z_B .

ج/* هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

(3) أ/* أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$.

ب/* احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$. (مقدرة بوحدة المساحة)

ج/* عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg\left[(z - z_B)^2\right] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$

د/* عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل، ثم اوجد z_I لاحقة مركز ثقله.

(4) نضع: $f = ros$ (يرمز o إلى تركيب التحويلين S و r).

أ/* عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب/* أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة).

(5) أ/* إذا كان $S(M) = M'$ ، ما طبيعة المثلث OMM' ؟

ب/* عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها: $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

(1) أ/* تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$

ب/* احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ج/* أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ/* بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتهما:

$y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ على الترتيب.

ب/* ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D') .

ج/ * بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

(3) أرسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f)

(4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y = m x - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ/ * بين أن جميع المستقيمت (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A \left(\frac{\ln 2}{2} + e ; \frac{\ln 2}{2} \right)$.

ب/ * ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

(5) نضع : $I = \int_{\ln \sqrt{2} + e}^{\ln \sqrt{3} + e} [f(x) - (x - e)] dx$ ، $I_n = \int_0^1 \ln(1 + X^n) dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ/ * فسر هندسيا العدد I و احسب العدد I_1 .

ب/ * بين أن : $0 \leq I_n \leq \ln 2$

ج/ * عين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(6) باستعمال : $\ln(1 + X) \leq X$ ، من أجل كل $X \in]0; +\infty[$

أ/ * استنتج أن : $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln \sqrt{2} + e}^{\ln \sqrt{3} + e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

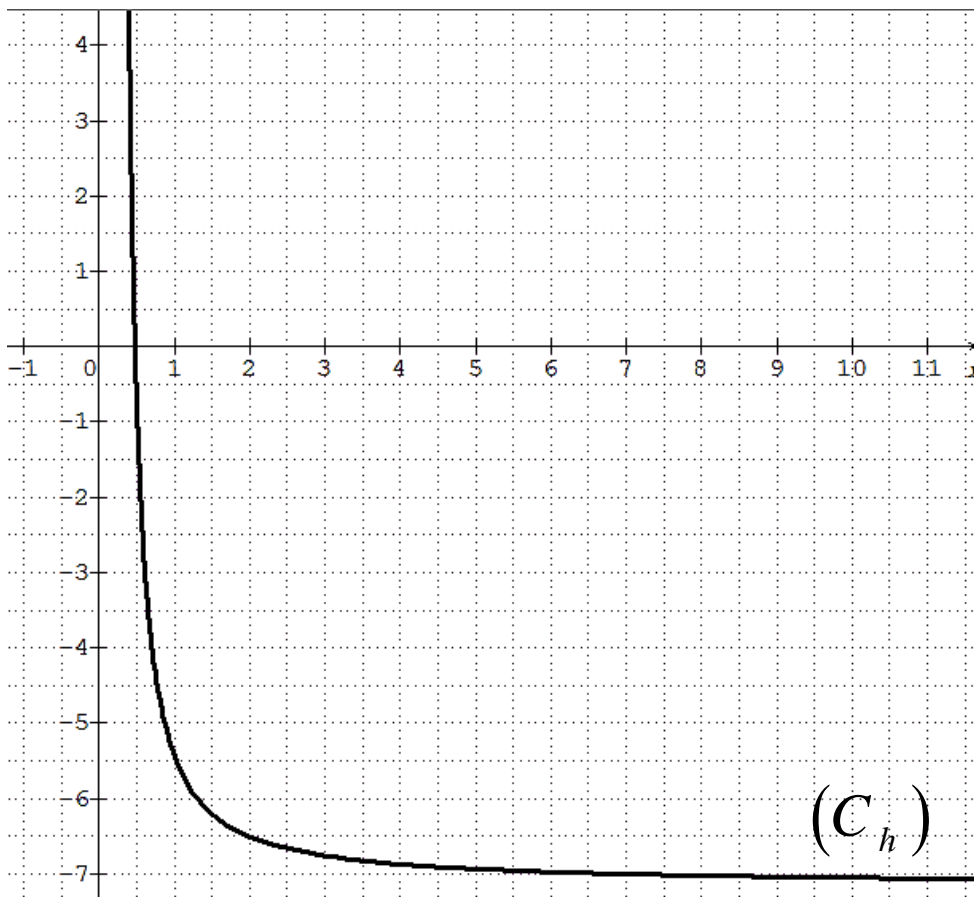
ب/ * اعط حصرا للعدد $I + I_1$.

انتهى

الموضوع الثاني

بالتوفيق في امتحان شهادة البكالوريا

الملحق:

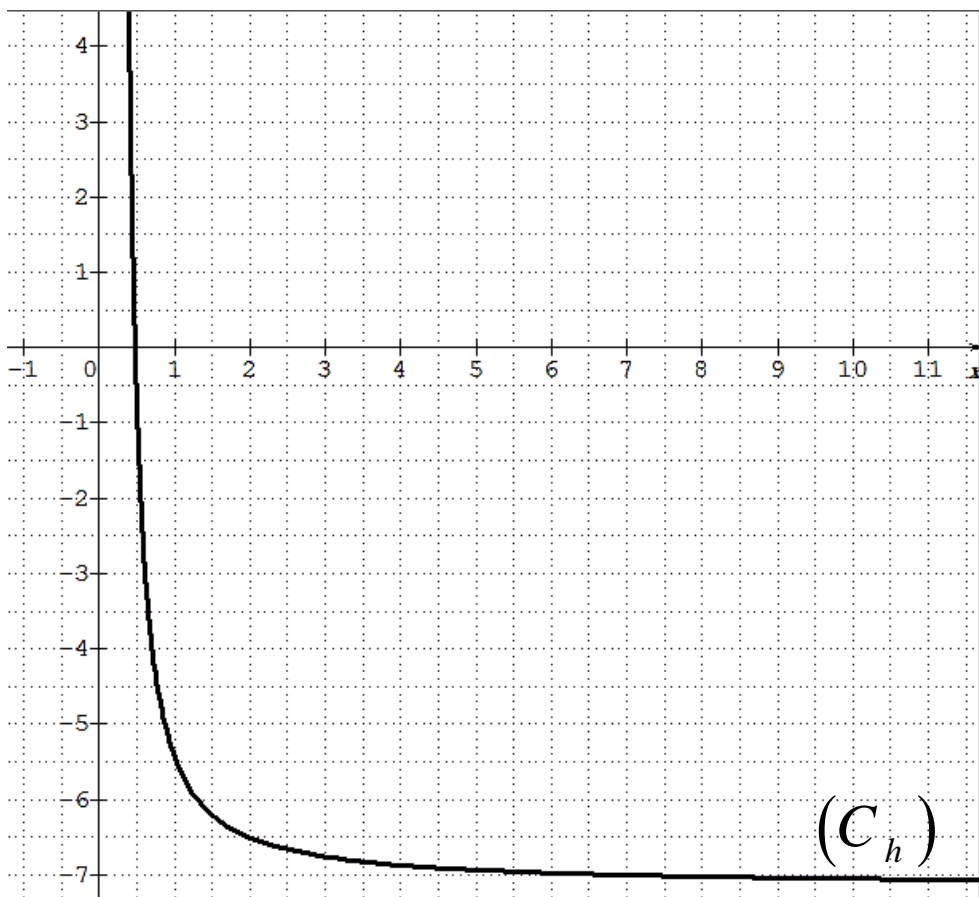


.....: الاسم

.....: اللقب

.....: القسم

الملحق:



.....: الاسم

.....: اللقب

.....: القسم

الموضوع الاول: التمرين الأول: (04 نقاط)

1) كتابة التمثيل الوسيطى (d) : t وسيط حقيقي

$$(d): \begin{cases} x-2=t \\ \frac{y-1}{2}=t; t \in \mathbb{R} \\ 1-z=t \end{cases}$$

أي أن: $x-2 = \frac{y-1}{2} = 1-z = t$ ومنه: $x-2 = \frac{y-1}{2} = 1-z = t$

إذن: التمثيل الوسيطى للمستقيم (d) هو $\begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t+1; t \in \mathbb{R} \\ z = -t+1 \end{cases}$

*/ تبيان أن (d) و (d') ليسا من نفس المستوى:

(d') شعاع توجيهه $\vec{u}'(1;2;-1)$ ، شعاع توجيهه $\vec{u}(3;1;2)$

بما أن $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{1}$ فإن الشعاعين $\vec{u}'(1;2;-1)$ و $\vec{u}(3;1;2)$

غير مرتبطين خطيا ، فيكون المستقيمان (d) و (d')

إما ليسا من نفس المستوى و إما متقاطعان من نفس المستوى

لتكن نقطة تقاطع (d) و (d') أي :

$$\begin{cases} x = t+2 = 3t'+4... (1) \\ y = 2t+1 = t'+3... (2) \\ z = -t+1 = 2t'+3... (3) \end{cases} ; (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

بجمع (1) و (3) : $t' = \frac{-4}{5}$ وبتعويضها في (1) أو (3)

نجد: $t = \frac{-2}{5}$ ، الثنائية $\left(\frac{-2}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ لا تحقق (2)

ومنه: (d) و (d') ليسا من نفس المستوى

2) أ) إيجاد المعادلة الديكارتية للمستويين (p1) و (p2)

ويشملان A(4;-7;5) و (d) $\subset (P_1)$ و (d') $\subset (P_2)$

تعيين معادلة المستوى (P1) : (p1) يشمل A(4;-7;5)

وموجه بالشعاعين $\vec{u}(1;2;-1)$ شعاع توجيهه (d) و

$\vec{AD}(-2;8;-4)$ حيث D(2;1;1) نقطة من (d)

ليكن: شعاع ناظمي للمستوي (p1) غير معدوم $\vec{n}(a;b;c)$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AD} = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} a+2b-c=0 \dots (1) \\ -2a+8b-4c=0 \dots (2) \end{cases}$$

نجد $6b-3c=0$ ومنه $c=2b$ نأخذ: $b=1$ نجد $c=2$

و $a=0$ ومنه: شعاع ناظمي لـ (p1) $\vec{n}(0;1;2)$

$A \in (P_1)$ معناه $7+10+d=0$ معناه $d=-3$

ومنه: $(P_1): y+2z-3=0$

تعيين معادلة للمستوي (P2) : لدينا (P2) يشمل A(4;-7;5)

وموجه بالشعاعين $\vec{u}'(3;1;2)$ شعاع توجيهه (d')

$\vec{AC}(0;10;-2)$ حيث C(4;3;3) نقطة من (d')

بنفس الطريقة $(P_2): 11x-3y-15z+10=0$

ب) التحقق أن (p1) و (p2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

بما أن: $\frac{0}{11} \neq \frac{1}{-3}$ فإن $\vec{n}(0;1;2)$ و $\vec{n}'(11;-3;-15)$ غير

مرتبطين خطيا و عليه يكون المستويان (P1) و (P2) متقاطعين

$$(\Delta): \begin{cases} x = \frac{-1}{11} + 9\alpha \\ y = 3 - 22\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 11\alpha \end{cases}$$

(P2): $11x-3y-15z+10=0$ ، (P1): $y+2z-3=0$

$0 \cdot \alpha = 0$ يكافئ $(-22\alpha+3)+2(11\alpha)-3=0$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه: $(\Delta) \subset (P_1)$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه: $0 \cdot \alpha = 0$ يكافئ $11\left(\frac{-1}{11}+9\alpha\right)-3(3-22\alpha)-15(11\alpha)+10=0$

المعادلة تقبل مالا نهاية من الحلول ومنه: $(\Delta) \subset (P_2)$

نستنتج أن $(\Delta) = (P_1) \cap (P_2)$

3) أ*) إيجاد إحداثيات A' المسقط العمودي لـ A على

المستوي (Q) : $A'(x';y';z')$ ، $\vec{n}_Q(11;1;-1)$ ناظمي لـ (Q)

و $A \in (\Delta)$. بما أن: $11x_A + y_A - z_A \neq 2$ فإن $A \notin (Q)$

وبالتالي \vec{AA}' يوازي \vec{n}_Q يوجد $k \in \mathbb{R}$ حيث $\vec{AA}' = k \cdot \vec{n}_Q$

أي $\vec{AA}'(x'-4; y'+7; z'-5)$

$$\begin{cases} x'-4=11k \\ y'+7=k \\ z'-5=-k \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x'=11k+4 \\ y'=k-7 \\ z'=-k+5 \end{cases}$$

معناه $k = -\frac{10}{41}$ $11(11k+4)+(k-7)-(-k+5)-2=0$

بالتعويض عن قيمة k نجد: $A'\left(\frac{54}{41}; -\frac{297}{41}; \frac{215}{41}\right)$

ب) استنتاج المسقط العمودي لـ (Δ) على المستوى (Q) :

المسقط العمودي للمستقيم (Δ) على (Q) هو المستقيم (BA')

4) تعيين طبيعة المجموعة (Γ) حيث $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

(Γ) هي سطح كرة قطرها [AB] ، $AB = \sqrt{\frac{17150}{121}} \approx 11.9$

ومركزها النقطة I $\left(\frac{43}{22}; -2; \frac{5}{2}\right)$ منتصف [AB]

التمرين الثاني: (04 نقاط) $A_0B_0 = 8$ ، التشابه المباشر S

مركزه A_0 ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ، $B_{n+1} = S(B_n)$

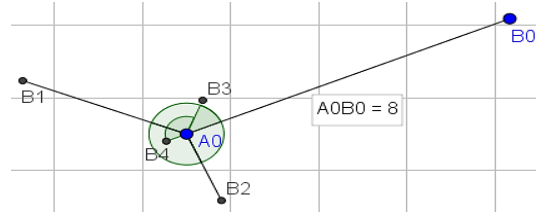
1) انشاء النقط B_1, B_2, B_3, B_4 و

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_1 = \frac{1}{2}A_0B_0 = 4 \\ (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_1}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ يكافئ } B_1 = S(B_0)$$

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_2 = \frac{1}{2}A_0B_1 = 2 \\ (\overline{A_0B_1}, \overline{A_0B_2}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_2 = S(B_1)$$

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_3 = \frac{1}{2}A_0B_2 = 1 \\ (\overline{A_0B_2}, \overline{A_0B_3}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_3 = S(B_2)$$

$$k \in \square , \begin{cases} A_0B_4 = \frac{1}{2}A_0B_3 = \frac{1}{2} \\ (\overline{A_0B_3}, \overline{A_0B_4}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{ معناه } B_4 = S(B_3)$$



2) اثبات أن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$A_0B_{n+1} = \frac{1}{2}A_0B_n \text{ معناه } B_{n+1} = S(B_n)$$

$$\text{و } (\overline{A_0B_n}, \overline{A_0B_{n+1}}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ، بما أن } k \in \square$$

$$\frac{A_0B_{n+2}}{A_0B_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}A_0B_{n+1}}{A_0B_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{A_0B_{n+1}}{A_0B_n} = \frac{\frac{1}{2}A_0B_n}{A_0B_n} = \frac{1}{2}$$

$$(\overline{A_0B_{n+1}}, \overline{A_0B_{n+2}}) = \left(\frac{1}{2}\overline{A_0B_n}, \frac{1}{2}\overline{A_0B_{n+1}} \right) = (\overline{A_0B_n}, \overline{A_0B_{n+1}})$$

فإن المثلثين $A_0B_nB_{n+1}$ و $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ متشابهان

$$\frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ (ضلعان و زاوية محصورة بينهما) ومنه:}$$

3) اثبات أن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$: نعرف

متتالية (u_n) بـ $u_n = B_nB_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

$$\text{ومنه: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{n+1}B_{n+2}}{B_nB_{n+1}} = \frac{1}{2} \text{ متتالية هندسية أساسها}$$

$$\frac{1}{2} \text{ و حدها الأول } u_0 = B_0B_1$$

ب*/ كتابة عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = B_0B_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج*/ نضع المجموع: $\delta_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حساب δ_n بدلالة n ثم إيجاد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n$: م.ح.م هندسية

$$\delta_n = u_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2B_0B_1 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$$

ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 2B_0B_1$

4) أ*/ نحل في $\square \times \square$ المعادلة: $3x - 4y = 2$ (1)

$$(1) \text{ يكافئ } 3x = 4y + 2 \text{ يكافئ } [4] \text{ يكافئ } 3x \equiv 2 [4]$$

$$\text{يكافئ } [4] \times 7 \text{ يكافئ } 7 \times 3x \equiv 7 \times 2 [4]$$

ومنه: $x = 4\lambda + 2$ ، $\lambda \in \square$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$$y = 3\lambda + 1 \text{ إذن: } S = \{(4\lambda + 2; 3\lambda + 1); \lambda \in \square\}$$

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون

النقطة B_n تنتمي إلى المستقيم (Δ) :

لدينا: (Δ) العمودي على (A_0B_0) في النقطة A_0 وكذلك

$$(\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_n}) = (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_1}) + (\overline{A_0B_1}, \overline{A_0B_2}) + \dots$$

$$\dots + (\overline{A_0B_{n-1}}, \overline{A_0B_n}) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \dots + \frac{3\pi}{4} = n \frac{3\pi}{4}$$

$$B_n \text{ تنتمي إلى } (\Delta) \text{ معناه } (\overline{A_0B_0}, \overline{A_0B_n}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ، } k \in \square$$

$$\text{نجد: } n \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ يكافئ } 3n = 4 \left(\frac{1}{2} + k \right)$$

$$\text{يكافئ } 3n = 2 + 4k \text{ يكافئ } 3n - 4k = 2$$

ومنه قيم n هي $n = 4k' + 2$ ، $k' \in \square$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ*/ نبين أن المعادلة (E) تكافئ: $(z+1) \left(\frac{-2}{z} - 4\bar{z} + 7 \right) = 0$

$$\text{لدينا: } \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \text{ (E) ...}$$

$$0 = (z+1) \left(\frac{-2}{z} - 4\bar{z} + 7 \right) \text{ يكافئ } \bar{z}^3 - 4\bar{z}^2 + 7\bar{z} + z^{-2} - 4\bar{z} + 7 = 0$$

$$\text{يكافئ } \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$$

ب*/ نحل في \square المعادلة (E) :

$$(z+1)(z^2 - 4\bar{z} + 7) = 0 \text{ (E) تكافئ}$$

$$\text{يكافئ } (z+1)(z^2 - 4\bar{z} + 7) = 0 \text{ يكافئ } (z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0$$

$$\text{يكافئ } \Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2 , \begin{cases} z = -1 \\ z^2 - 4z + 7 = 0 \end{cases}$$

$$z_1 = 2 - \sqrt{3}i \text{ و } z_2 = 2 + \sqrt{3}i$$

ومنه: من أجل k يسمح المجال $[0; +\infty[$ المجموعة (Γ)

هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه \overrightarrow{AB}

$$\text{لاحقته: } 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3 + i\sqrt{3}$$

5) *تعيين قيمة العدد α حيث $-\overline{CA} + 2\overline{CB} + \alpha\overline{CD} = \overline{0}$

$$-\overline{CA} + 2\overline{CB} + \alpha\overline{CD} = \overline{0}$$

معناه النقطة C هي مرجح الجملة $\{(A; -1), (B; 2), (D; \alpha)\}$

$$\alpha = -3 \text{ ومنه } \begin{cases} 2 = \frac{1+4+3\alpha}{1+\alpha} \\ -\sqrt{3} = \frac{0+2\sqrt{3}+0\cdot\alpha}{1+\alpha} \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} x_C = \frac{-x_A+2x_B+\alpha x_D}{-1+2+\alpha} \\ y_C = \frac{-y_A+2y_B+\alpha y_D}{-1+2+\alpha} \end{cases}$$

ب) *تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$(*) \dots \left\| -\overline{AM} + 2\overline{BM} - 3\overline{DM} \right\| \leq 2 \left\| \overline{BM} - \overline{CM} \right\|$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| \overline{MA} - 2\overline{MB} + 3\overline{MD} \right\| \leq 2 \left\| \overline{BM} + \overline{MC} \right\|$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| -(-\overline{MA} + 2\overline{MB} - 3\overline{MD}) \right\| \leq 2 \left\| \overline{BC} \right\|$$

$$(*) \text{ تكافئ } \left\| (-1+2-3)\overline{CM} \right\| \leq 2BC \text{ تكافئ } CM \leq BC$$

ومنه مجموعة النقط (E) هي قرص مركزه النقطة C

ونصف قطره هو: $BC = 2\sqrt{3}$

ج) *استنتاج مجموعة نقط تقاطع القرص (E) ونصف

المستقيم (AB) : لدينا القرص (E) مركزه C ونصف قطره

$BC = 2\sqrt{3}$ و $AC = 2\sqrt{3}$ معناه A تنتمي إلى القرص (E)

ومنه تقاطع القرص (E) ونصف المستقيم (AB)

هو القطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1) g معرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 e^x$

***أ) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $[0; +\infty[$:**

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$: $g'(x) = (x^2 + 2x)e^x$

بما ان $g'(x) > 0$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $[0; +\infty[$

ب) *استنتاج أنه: إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

و إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $0 < x < 1$ فإن $x < \frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما

على $[0; +\infty[$ ، فإن $g(x) < g\left(\frac{1}{x}\right)$

إذا كان $x > 1$ فإن $x > \frac{1}{x}$ ولدينا g متزايدة تماما على

$[0; +\infty[$ ، فإن $g(x) > g\left(\frac{1}{x}\right)$

ومنه: $S = \{-1; 2 - \sqrt{3}i; 2 + \sqrt{3}i\}$

2) *تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب

$(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا: لدينا

$$(z_B - z_A)^n = (2 + \sqrt{3}i + 1)^n = (3 + \sqrt{3}i)^n$$

$$(z_B - z_A)^n = (2\sqrt{3})^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

ومنه عددا حقيقيا سالبا معناه:

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi \text{ ومنه } \arg(z_B - z_A)^n = \pi + 2k\pi$$

$$n = 12k + 6; k \in \mathbb{Z}$$

ب) *تعيين طبيعة المثلث ABC

$$AC = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$AB = |z_B - z_A| = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

بما ان $AB = AC = BC$: فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) *كتابة العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسى:

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{-1 - 2 + i\sqrt{3}}{3 - 2 + i\sqrt{3}} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

***استنتاج طبيعة التحويل الذي يحول A إلى D وعناصره**

$$\text{المميزة: } z_A - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_D - z_C) \text{ معناه } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

معناه النقطة A صورة النقطة D بالتشابه المباشر الذي

مركزه النقطة C ونسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD

$$\begin{cases} \left| \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} \right| = \sqrt{3} \\ \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ لدينا: } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ معناه}$$

اذن المثلث ACD قائم في C ومنه مركز الدائرة المحيطة

بالمثلث ACD هو النقطة I منتصف الوتر $[AD]$

$$\text{لاحقته } z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{1}{2}$$

4) *تعيين قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overline{AB})$:

$$\text{لدينا: } (\vec{u}; \overline{AB}) = \arg(z_B - z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

***استنتاج (Γ) مجموعة النقط (z) حيث:**

$$z - z_A = k(z_B - z_A) \text{ معناه } z + 1 = 2\sqrt{3}ke^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{معناه } \overline{AM} = k \cdot \overline{AB}$$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

$x^2 - 2x + 2 > 0$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لأن $\Delta = -4$

ومنه: (C_f) يقع فوق (C_h) على المجال $]0; +\infty[$

ج/ نبين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة التي

فاصلتها 1 يطلب كتابة معادلته:

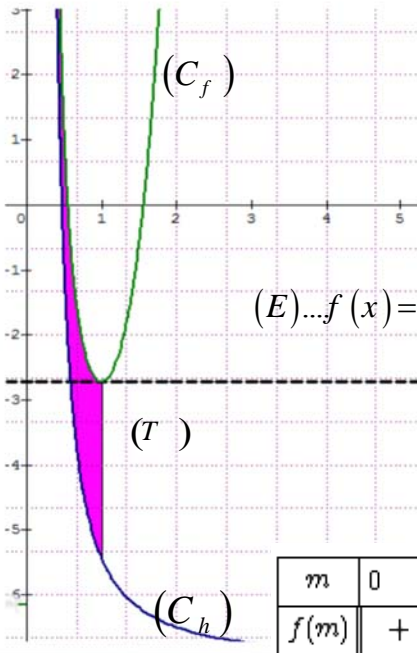
بما ان الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ فإن تمثيلها (C_f)

يقبل عند كل نقطة فاصلتها من $]0; +\infty[$ مماسا

$$f'(1) = 0; f(1) = -e, (T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ومنه: $(T): y = -e$

4 رسم (T) و (C_f) :



ب/ إيجاد قيم m حتى

تقبل المعادلة (E)

حليين متمايزين:

لدينا m وسيط حقيقي

حيث $m > 0$

$$(E) \dots f(x) = (m^2 - 2m + 2)e^m + h(m)$$

المعادلة (E) تكافئ

$$f(x) = f(m)$$

إشارة $f(m)$:

m	0	α	1	$E + \infty$
$f(m)$	+	0	-	-

من أجل $m = 1$ المعادلة (E) تقبل حلا مضاعفا .

ومنه: المعادلة (E) تقبل حليين متمايزين لما

$$m \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

5 نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

$$\int_1^x [f(t) - h(t)] dt = \int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt$$

الدالة: $(t^2 - 2t + 2)e^t \rightarrow t$ مستمرة على $]0; +\infty[$ فهي تقبل

دوالا أصلية على $]0; +\infty[$

$$\left[(t^2 - 4t + 6)e^t - 3e \right]' = (t^2 - 2t + 2)e^t$$

$$\int_1^x (t^2 - 2t + 2)e^t dt = \int_1^x \left[(t^2 - 4t + 6)e^t - 3e \right]' dt$$

$$= (x^2 - 4x + 6)e^x - 3e$$

2 معرفة على $]0; +\infty[$: $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^{\frac{1}{x}} - 3e$

أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب/ نبين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ دالتها المشتقة f' :

$$f'(x) = x^2 e^x - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(1) = g(1) - g\left(\frac{1}{1}\right) = 0$$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	$1 + \infty$
$f'(x)$	-	0 +

إشارة $f'(x)$:

f متزايدة تماما على $]1; +\infty[$

f متناقصة تماما على $]0; 1[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	$+\infty$	$-e = -2.71$	$+\infty$

3 نبين أن المعادلة: $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل

حليين α و β حيث: $1.5 < \beta < 1.6$ و $0.5 < \alpha < 0.6$

$(x^2 - 2x + 2)e^x + h(x) = 0$ تكافئ $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$

تكافئ $f(x) = 0$ ، لدينا: $f(0.5) \approx 1.25$ ، $f(0.6) \approx -0.74$

بما ان الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]0.5; 0.6[$

$f(0.6) \times f(0.5) < 0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد α

حيث: $f(\alpha) = 0$ ، $0.5 < \alpha < 0.6$

لدينا: $f(1.5) \approx -0.60$ ، $f(1.6) \approx 0.44$

بما ان الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $]1.5; 1.6[$

$f(1.6) \times f(1.5) < 0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة $(x^2 - 2x + 2)e^x = -h(x)$ تقبل حل وحيد β

حيث: $f(\beta) = 0$ ، $1.5 < \beta < 1.6$

أ/ استنتاج أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:

بما ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حليين α و β فإن (C_f)

يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β

ب/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) :

لدينا $0 + 2(0) - 2m - 5 = 0$ أي $m = -\frac{5}{2}$ إذن: $D \notin (ABC)$

لأن m عدد حقيقي موجب ومنه: $ABCD$ رباعي وجوه
 /* نبين أن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو $V = \frac{2m+5}{6} uv$

لدينا $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times h$ حيث $h = d(D, (ABC))$ هو الارتفاع

$$d(D; (ABC)) = \frac{|-2m-5|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2m+5}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2m+5}{3} = \frac{2m+5}{6} uv \text{ ومنه}$$

(2) /* نبين أن (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم

$[AB]$ معادلته الديكارتية $-2x + y = \frac{-5}{2}$ هناك عدة طرق منها

إحداثيات $I(2; \frac{3}{2}; 0)$ منتصف $[AB]$ تحقق التمثيل الوسيط لـ

(Q) والشعاع $\vec{AB}(2, -1, 0)$ عمودي على شعاعي توجيهه
 $\vec{u}(1; 2; 0)$ و $\vec{v}(-2; -4; -5)$ ومنه (Q) مستوي محوري لـ $[AB]$

/* تعيين معادلة (Q) : لدينا

$$z = -5\alpha \text{ نجد: } \begin{cases} x = 2 - 2\alpha + \beta \dots (1) \\ y = \frac{3}{2} - 4\alpha + 2\beta \dots (2) \\ z = -5\alpha \dots (3) \end{cases} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

يكافئ $\alpha = \frac{z}{-5}$ بالتعويض في (1) نجد: $x = 2 - 2\left(\frac{z}{-5}\right) + \beta$

ومنه: $\beta = x - 2 - \frac{2z}{5}$ نعوض قيمة α و β في (2) نجد:

$$-2x + y = \frac{-5}{2} \text{ ومنه } y = \frac{3}{2} - 4\left(\frac{z}{-5}\right) + 2\left(x - 2 - \frac{2z}{5}\right)$$

ومنه معادلة (Q) هي: $-4x + 2y + 5 = 0$

/* بطريقة أخرى: (Q) يشمل $I(2; \frac{3}{2}; 0)$ منتصف $[AB]$

و $\vec{AB}(-2; 1; 0)$ شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيط يحقق

(Q) : $-2x + y = \frac{-5}{2}$ ومنه المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$

/* استنتاج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان وهما

مقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيطى:

$$\text{بما أن } \vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (1) + 0 \cdot (-2) = 0 \text{ فإن } (Q)$$

و (ABC) متعامدان فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

/* تعيين التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - 5 = 0 \dots (1) \\ -4x + 2y + 5 = 0 \dots (2) \end{cases} \text{ بطرح (2) من (1) نجد:}$$

ب/* استنتاج $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_h)

و (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \lambda$ و $x = 1$

(مقدرة بوحدة المساحة) حيث $\lambda \in]0; 1]$

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda [f(t) - h(t)] dt = - \int_\lambda^1 [f(t) - h(t)] dt$$

$$A(\lambda) = - \left[(\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda - 3e \right]$$

$$= (3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda) u a$$

/* حساب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[3e - (\lambda^2 - 4\lambda + 6)e^\lambda \right] = 3e$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول: (04 نقاط)

$D(0; 0; m)$ و $C(3; 2; 1)$ ، $B(1; 2; 0)$ ، $A(3; 1; 0)$

(1) /* حساب $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ، $\vec{BC}(2; 0; 1)$ ، $\vec{BA}(2; -1; 0)$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 2(2) + 0(-1) + 1(0) = 4$$

لدينا: $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 4$

/* استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ $\cos \angle ABC$ و $\sin \angle ABC$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\| \cos \angle ABC \text{ لدينا } \cos \angle ABC = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\|} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{ومنه: } \cos \angle ABC = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \angle ABC = 1 - \cos^2 \angle ABC$$

$$\sin \angle ABC = -\frac{3}{5} \text{ أو } \sin \angle ABC = \frac{3}{5} \text{ ومنه}$$

ب/* حساب مساحة المثلث ABC ولتكن S_{ABC} :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2} ua$$

ج/* نبين أن $\vec{n}(1; 2; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) :

$$\vec{n} \cdot \vec{BC} = 1(2) + 2(0) - 2(1) = 0 \text{ وكذلك}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{BA} = 1(2) + 2(-1) - 2(0) = 0$$

فإن $\vec{n}(1; 2; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

/* استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

$$\text{لدينا } (ABC): x + 2y - 2z + d = 0$$

$$A \in (ABC) \text{ تكافئ } 3 + 2 + d = 0 \text{ تكافئ } d = -5$$

$$\text{ومنه: } (ABC): x + 2y - 2z - 5 = 0$$

د/* تبيان أن $ABCD$ رباعي وجوه:

نبين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوي (ABC)

$$n \in \mathbb{N}^* , b = 11n + 4 \text{ و } a = 5n + 2$$

$$11a - 5b = 11(5n + 2) - 5(11n + 4) = 55n + 22 - 55n - 20 = 2$$

ومنه $d \in D_2 = \{1; 2\}$: إذن $d/2$:

ب/ *تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون

$$PGCD(a; b) = 2 \text{ لدينا } : PGCD(a; b) = 2$$

معناه 2 يقسم a و 2 يقسم b معناه 2 يقسم $b - 2a$

أي 2 يقسم $11n + 4 - 2(5n + 2)$ وبالتالي 2 يقسم n .

ومنه $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{N}^*$: الشكل من الشكل :

ج/ *استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون

العددان a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق

من أجل $PGCD(a; b) = 2$ قيم $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{N}^*$:

ومنه : قيم n حيث $PGCD(a; b) = 1$ هي $n = 2\alpha + 1 / \alpha \in \mathbb{N}$:

(3) *أ/ نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$$n \in \mathbb{N} , B = 11n^2 + 15n + 4 \text{ و } A = 5n^2 + 7n + 2$$

$$B = (n+1)(11n+4) = b(n+1) , A = (n+1)(5n+2) = a(n+1)$$

ومنه : $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب/ *استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين

A و B :

$$PGCD(A; B) = PGCD(a(n+1); b(n+1)) = (n+1)PGCD(a; b)$$

ومنه نميز حالتين :

الحالة 1: إذا كان $PGCD(a; b) = 2$ معناه $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{N}^*$

$$PGCD(A; B) = (2\alpha + 1)2 = 4\alpha + 2$$

الحالة 2: إذا كان $PGCD(a; b) = 1$ معناه $n = 2\alpha + 1 / \alpha \in \mathbb{N}$

$$PGCD(A; B) = (2\alpha + 1 + 1)1 = 2\alpha + 2$$

التمرين الثالث (05 نقاط)

(1) تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :

$$\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \dots (1) \\ (\sqrt{3} + 2i)z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3})i \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2iz_1 + z_2 = -i + \sqrt{3} \dots (1') \\ \sqrt{3}z_1 + 2iz_1 - z_2 = i - i\sqrt{3} \dots (2) \end{cases}$$

الأولى في (1) نجد

$$z_1 = 1 - i \text{ ومنه } \sqrt{3}z_1 = \sqrt{3}(1 - i) \text{ و } z_2 = 2 + \sqrt{3} + i$$

بالتعويض في (1) نجد :

$$z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ على الشكل الأسّي : } z_A$$

$$z_B = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ : نبين أن } z_B$$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})i}{2}$$

$$\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ومنه : } z_B = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$5x - 2z - 10 = 0 \text{ نضع } z = t \text{ (وسيط حقيقي) نجد}$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = \frac{2}{5}t + 2 \\ y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{2} ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \text{ إذن : } y = \frac{4}{5}t + \frac{3}{2} \text{ و } x = \frac{2}{5}t + 2$$

ج/ *حساب $d(D; (Q))$ ثم استنتاج بدلالة m المسافة بين

$$D \text{ و } (\Delta) : d(D; (Q)) = \frac{|-4(0) + 2(0) + 5|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

بمأن (Q) و (ABC) متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$$d(D; (\Delta))^2 = d(D; (Q))^2 + d(D; (ABC))^2$$

$$d(D; (\Delta)) = \sqrt{\frac{5}{4} + \left(\frac{2m+5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{16m^2 + 80m + 145}}{6} \text{ ومنه :}$$

(3) *أ/ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي m - (S_m) سطح كرة

يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها :

$$\text{لدينا : } x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$$

ومنه : $x^2 + y^2 + (z - m)^2 = 9$: إذن (S_m) سطح

كرة مركزها النقطة $D(0; 0; m)$ و نصف قطرها $r = 3$.

ب/ *تعيين m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح

الكرة (S_m) . (ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني

$$d(D; (ABC)) = 3 \text{ أي أن } \frac{2m+5}{3} = 3 \text{ ومنه : } m = 2$$

(4) معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC)

$$\text{ويمس } (S_m) : \text{ لدينا : } x + 2y - 2z + d = 0 \text{ (P)}$$

المستوي (P) مماس لـ (S_m) يعني :

$$|-4 + d| = 9 \text{ أي } d(D; (P)) = \frac{|-4 + d|}{3} = 3$$

ومنه : $d = 13$ أو $d = -5$ هو المستوي (ABC)

$$\text{إذن : } (p) : x + 2y - 2z + 13 = 0$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$(1) \text{ *أ/ إثبات أن : } y \equiv 4[11] \text{ ، } 11x - 5y = 2 \dots (E)$$

$$11x - 5y = 2 \text{ يكافئ } 11x = 5y + 2 \text{ ومنه } 5y \equiv -2[11] \text{ أي } 5y \equiv 11[11]$$

$$\text{أي } 5y \equiv 20[11] \text{ ومنه : } y \equiv 4[11]$$

ب/ *استنتاج حلول المعادلة (E) :

$$y \equiv 4[11] \text{ معناه } y = 11k + 4 \text{ مع } k \in \mathbb{Z} \text{ ، نعوض قيمة}$$

$$y \text{ في المعادلة } (E) \text{ نجد : } x = 5k + 2$$

$$\text{ومنه : } S = \{(11k + 4; 5k + 2) / k \in \mathbb{Z}\}$$

(2) *أ/ تعيين القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a; b)$:

***/استنتاج الشكل الأسي للعدد z_B :**

$$z_B = z_A (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{ومنه } z_B = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{12}}$$

ج*/تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد

تتنمى إلى المنصف الأول إن وجدت :

$$\left(\frac{z_B}{z_A} \right)^n = (1 + \sqrt{3})^n e^{i \frac{n\pi}{3}} \text{ لدينا } \arg \left(\frac{z_B}{z_A} \right)^n = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{أي : } \arg \left(\frac{z_B}{z_A} \right)^n \equiv \frac{n\pi}{3} [2\pi] \text{ ومنه : } \frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ، } k \in \mathbb{Z}$$

أي $4n - 12k = 3$ ، $PGCD(12; 4) = 4$ لا تقسم 3 ومنه المعادلة لا تقبل حلول إذن لا يوجد قيم لـ n تحقق المطلوب .

(3) */إيجاد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران

r الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$

$$\text{عبرة الدوران } r \text{ من الشكل : } z' = e^{-i \frac{\pi}{6}} z$$

$$z_{B'} = e^{-i \frac{\pi}{6}} z_B = e^{-i \frac{\pi}{6}} \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{i \frac{\pi}{12}} = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{-i \frac{\pi}{12}}$$

$$z_{B'} = \sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) e^{-i \frac{\pi}{12}} = \overline{z_B} = 2 + \sqrt{3} - i$$

ب*/حساب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$ لدينا

$$R = \frac{BB'}{2} = \frac{|z_{B'} - z_B|}{2} = \frac{|-2i|}{2} = \frac{2}{2} = 1, S = \pi R^2$$

$$\text{ومنه : } s = \pi u a$$

ج*/تعيين مجموعة النقط (z) من المستوى حيث:

$$\arg \left[(z - z_B)^2 \right] = \arg(z_B) - \arg(z_{B'})$$

$$\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ومنه } 2\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\text{تفسيرها : } (\overline{u}; \overline{BM}) = \frac{\pi}{12} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (OB) ماعدا النقطة B .

د*/تعيين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل:

$$\left(\overline{B'B}; \overline{B'A} \right) = \arg \left(\frac{z_A - z_{B'}}{z_B - z_{B'}} \right) = \arg(z_A - z_{B'}) - \arg(z_B - z_{B'})$$

$$\left(\overline{B'B}; \overline{B'A} \right) = \arg(1 - i - 2 - \sqrt{3} + i) - \arg(2i) = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\left(\overline{B'B}; \overline{B'A} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ : ومنه نجد :}$$

$$z_C = 1 + i \text{ ومنه } \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 1 \end{cases} \text{ معناه } \overline{B'B} = \overline{AC}$$

بطريقة أخرى لدينا $z_{B'} = \overline{z_B}$ معناه B و B' متناظران

بالنسبة لمحور الفواصل ولدينا $A(1; -1)$ و $B'(2 + \sqrt{3}; -1)$ أي A و B' لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم $y = -1$ موازي لمحور الفواصل ومنه نجد :
 $z_C = \overline{z_A} = 1 + i$

***/إيجاد z_I لاحقة مركز ثقل المستطيل $AB'BC$**

$$z_I = \frac{1 - i + 4 + 2\sqrt{3} + 1 + i}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \text{ ومنه } z_I = \frac{z_A + z_B + z_{B'} + z_C}{4}$$

(4) */تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون

$$f = ros \text{ : } \frac{\pi}{3} \text{ ونسبته } 2 \text{ وزاويته}$$

S تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته θ أي ROS تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته $\theta - \frac{\pi}{6}$

$$\text{ومنه : } k = 2 \text{ و } \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ أي } \theta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

ومنه عبارة التشابه S هي : $z' = 2e^{i \frac{\pi}{2}} z$ ونكتب $z' = 2iz$

ب*/إيجاد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S :

$$\text{مساحة صورة الدائرة } (\gamma) \text{ هي } S' \text{ حيث : } s' = k^2 s = 4\pi u a$$

(5) */إذا كان $S(M) = M'$ إيجاد طبيعة المثلث OMM' :

$$z' = 2e^{i \frac{\pi}{2}} z \text{ ومنه : } \frac{z'}{z} = 2e^{i \frac{\pi}{2}} \text{ معناه } \arg \frac{z'}{z} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{معناه } \left(\overline{OM}; \overline{OM'} \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ و } \left| \frac{z'}{z} \right| = 2 \text{ أي } |z'| = 2|z|$$

$$\text{معناه } \|\overline{OM'}\| = 2\|\overline{OM}\| \text{ ومنه : المثلث } OMM' \text{ قائم في } O$$

ب*/تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي يكون من

$$\text{أجلها : } \overline{AM}(x - 1; y + 1), \overline{AM}(z - z_A) : \overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0$$

$$\text{و } \overline{AM'}(z' - z_A) \text{ أي } \overline{AM'}(2iz - z_A) \text{ ومنه } \overline{AM'}(-2y - 1; 2x + 1)$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = 0 \text{ معناه } (x - 1)(-2y - 1) + (y + 1)(2x + 1) = 0$$

$$\text{معناه } x + 3y + 2 = 0$$

مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته $x + 3y + 2 = 0$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(1) */التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

$$f(x) = x - e + \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = x - e + \ln\left(\frac{e^{2(x-e)} + 2}{e^{2(x-e)}}\right)$$

$$= x - e + \ln(e^{2(x-e)} + 2) - \ln(e^{2(x-e)}) = -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)})$$

ب */ حساب النهايات $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ج */ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = \frac{1 - 2e^{-2(x-e)}}{1 + 2e^{-2(x-e)}} : \square \text{ الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على}$$

حيث m وسيط حقيقي.

$$\text{معناه } y = m x - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{معناه } m \left(x - e - \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2} - y = 0$$

$$\frac{\ln 2}{2} - y = 0 \text{ و } x - e - \frac{\ln 2}{2} = 0 \text{ ومنه: جميع المستقيمات}$$

$$(D_m) \text{ تشمل النقطة الثابتة } A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$$

ب/ مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط

تقاطع المستقيم (D_m) و المنحني (C_f) :

$$\text{المستقيم } (D_m) \text{ يدور حول النقطة الثابتة } A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right)$$

إذا كان $m = 1$ فإن (D_m) هو (D) لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m = -1$ فإن (D_m) هو (D') لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m = 0$ فإن (D_m) هو $(D_0): y = \ln \sqrt{2}$ لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m \in]-1; 1[$ فإنه لا توجد نقط تقاطع

إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

5/ التفسير الهندسي العدد I : هو مساحة الحيز المستوي

المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم المقارب (D) والمستقيمين

$$\text{الذيهم معادلتيهما } x = \ln \sqrt{2} + e, \quad x = \ln \sqrt{3} + e$$

$$\text{حساب العدد } I_1 : I_1 = \int_0^1 \ln(1+X) dX \text{ بالمكاملة بالتجزئة}$$

$$\text{بوضع: } u(X) = \ln(1+X), \quad u'(X) = \frac{1}{1+X}$$

$$v(X) = X, \quad v'(X) = 1$$

$$I_1 = [X \ln(1+X)]_0^1 - \int_0^1 \frac{X+1-1}{X+1} dX$$

$$= [X \ln(1+X)]_0^1 - \int_0^1 1 dX + \int_0^1 \frac{1}{X+1} dX$$

$$= [X \ln(1+X) - X + \ln(1+X)]_0^1 = \ln 4 - 1$$

$$\text{ب/ نبيّن أن } 0 \leq I_n \leq \ln 2 : \text{ لدينا } I_n = \int_0^1 \ln(1+X^n) dX$$

$$0 \leq \ln(X^n + 1) \leq \ln 2 \text{ معناه } 1 \leq X^n + 1 \leq 2 \text{ معناه } 0 \leq X \leq 1$$

$$\text{ومنه: } 0 \leq I_n \leq \ln 2 \text{ اذن } 0 \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX \leq \int_0^1 \ln 2 dX$$

ج/ تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$$\text{بضرب أطراف المتباينة (1) في } X^n \text{ نجد } \begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \dots (1) \\ 0 \leq X^n \leq 1 \end{cases}$$

$$x = e + \ln \sqrt{2} \text{ معناه } 1 - 2e^{-2(x-e)} = 0 \text{ معناه } f'(x) = 0$$

x	$-\infty$	$e + \ln \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		\ominus	\oplus

الدالة f متزايدة تماما على $[e + \ln \sqrt{2}; +\infty[$

الدالة f متناقصة تماما على $] -\infty; e + \ln \sqrt{2}]$

تشكيل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	$\ln 2/2 + e$	$+\infty$
$f'(x)$		\ominus	\oplus
$f(x)$	$+\infty$	$3 \ln 2/2 + e$	$+\infty$

2/ نبيّن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D')

معادلتاهما: $y = x - e$ و $y = -x + \ln 2 + e$ عند $+\infty$

و عند $-\infty$ **على الترتيب:** بما أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - e)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + e + \ln 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2] = 0$$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب/ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

$$\text{لدينا: } f(x) - (x - e) = \ln(1 + 2e^{-2(x-e)})$$

$$\ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) > \ln 1 = 0 \text{ معناه } 1 + 2e^{-2(x-e)} > 1$$

ومنه: $f(x) - (x - e) > 0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D)

$$\text{لدينا: } f(x) - (-x + e + \ln 2) = \ln(2 + e^{2(x-e)}) - \ln 2$$

$$\ln(2 + e^{2(x-e)}) > \ln 2 \text{ معناه } 2 + e^{2(x-e)} > 2$$

ومنه: $f(x) - (-x + e + \ln 2) > 0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D')

من أجل كل عدد حقيقي x

$$\text{ج/ نبيّن أن المستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$$

هو محور تناظر للمنحني (C_f) :

من أجل كل x من \square : $\square \left(2 \left(\frac{\ln 2}{2} + e \right) - x \right)$ من \square ، لدينا

$$f \left(2 \left(\frac{\ln 2}{2} + e \right) - x \right) = f(\ln 2 + 2e - x)$$

$$= -x + e + \ln(2 + e^{2(x-e)}) = f(x)$$

ومنه: $x = \frac{1}{2} \ln 2 + e$ محور تناظر للمنحني (C_f)

3/ رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f) :

4/ نبيّن أن جميع المستقيمت (D_m) تشمل النقطة الثابتة

$$A \left(\frac{\ln 2}{2} + e; \frac{\ln 2}{2} \right) : (D_m): y = m x - m \left(e + \frac{\ln 2}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2}$$

6) باستعمال: $\ln(1+X) \leq X$ من اجل كل $X \in]0; +\infty[$

أ*/ استنتاج أن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

$\ln(1+X) \leq X$ من اجل كل $X \in]0; +\infty[$

لدينا: $1 + 2e^{-2(x-e)} > 0$ بوضع: $X = 1 + 2e^{-2(x-e)}$ وبالتالي $0 \leq \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) \leq 2e^{-2(x-e)}$

$$0 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} \ln(1 + 2e^{-2(x-e)}) dx \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx$$

ومنه: $0 \leq -1 + \ln 4 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

اذن: $0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$

ب*/ اعطاء حصر للعدد $I + I_1$:

$$0 \leq I + I_1 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx - 1 + \ln 4$$

$$\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)} dx = - \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} -2e^{-2(x-e)} dx = - \left[e^{-2(x-e)} \right]_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} = \frac{1}{6}$$

ومنه: $0 \leq I + I_1 \leq \frac{1}{6} - 1 + \ln 4$

$$0 \leq X^{n+1} + 1 \leq X^n + 1 \text{ أي } 0 \leq X^{n+1} \leq X^n$$

$n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \ln(X^{n+1} + 1) \leq \ln(X^n + 1)$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(X^{n+1} + 1) dX \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX$$

$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على \mathbb{N}^*

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر ($0 \leq I_n \leq \ln 2$)

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

ج*/ تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$$\begin{cases} 0 \leq X \leq 1 \dots (1) \\ 0 \leq X^n \leq 1 \end{cases}$$

بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد

$$0 \leq X^{n+1} + 1 \leq X^n + 1 \text{ أي } 0 \leq X^{n+1} \leq X^n$$

$n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \ln(X^{n+1} + 1) \leq \ln(X^n + 1)$

$$0 \leq \int_0^1 \ln(X^{n+1} + 1) dX \leq \int_0^1 \ln(X^n + 1) dX$$

$0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على \mathbb{N}^*

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر ($0 \leq I_n \leq \ln 2$)

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

09

3 رسم (Δ) , (D) , (D') و (C_f) .

