

الموضوع الرابع

التمرين الأول:

نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة الاتية: (E).....  $11x - 5y = 2$

(1) أ - برهن أن إذا كانت الثنائية  $(x; y)$  من  $\mathbb{Z}^2$  حلا للمعادلة (E) فإن  $y \equiv 4 [11]$ .

ب - استنتج حلول المعادلة (E).

(2) ليكن  $n$  عددا طبيعى غير معدوم ، نضع  $a = 5n + 2$  و  $b = 11n + 4$

أ- عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$ .

ب- عين قيم  $n$  بحيث يكون  $PGCD(a, b) = 2$ .

ت- استنتج قيم  $n$  بحيث يكون العددان  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما .

(3) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم  $n$  بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $7^n$  على 10 .

ب- استنتج رقم احاد العدد  $7^{2014}$ .

ت- عين الثنائيات  $(x; y)$  من  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  التي هي حلول المعادلة (E) وتحقق  $7^{y-2x} \equiv 9 [10]$ .

التمرين الثاني:

مسابقة إمتحان شفهي تنظم بحيث يسحب المترشح عشوائيا 3 مواضيع من مجموع 80 موضوعا ويجب على المترشح أن يجيب على موضوع على الأقل من بين المواضيع الثلاثة المسحوبة .

1. ما هو عدد الطرق لسحب المترشح ثلاثة مواضيع عشوائيا .

2. يتقدم مرشح لهذا الامتحان ولم يدرس سوى 50 موضوع من بين 80 ما احتمال أن :

A. " يجيب المترشح على المواضيع الثلاثة "

B. " يجيب المترشح على موضوعين فقط "

C. " يجيب المترشح على موضوع واحد فقط "

D. " لا يجيب المترشح على أي موضوع "

3. ما هو عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها المترشح لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل يتجاوز 0,99

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بجددها الأول  $u_0 = \frac{1}{5}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

- (1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$
- (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < \frac{1}{2}$
- (3) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1}$  ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .
- (4) هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ؟ إن كانت الإجابة نعم عين نهايتها .
- (5) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

- أ- أثبت أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = 6$  .
- ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$
- ت- أحسب  $\lim u_n$  و أحسب  $S_n$  المجموع بدلالة  $n$  حيث :  $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

- i.  $g$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = x^3 - 3x - 4$ 
  - (1) أدرس تغيرات الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها .
  - (2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $2 < \alpha < 3$
  - (3) استنتج إشارة  $g(x)$  .
- ii.  $f$  دالة عددية معرفة على  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .
  - (1) عين الاعداد الحقيقية  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D_f$  :  $f(x) = ax + b \frac{cx + d}{x^2 - 1}$
  - (2) بين انه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D_f$  :  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة
  - (3) احسب نهايات الدالة  $f$  عند حدود أطراف مجموعة تعريفها المفتوحة مستنتجا معادلات المستقيمات المقاربة .
  - (4) بين ان  $y = x + 2$  :  $(\Delta)$  مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  .
  - (5) شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  ثم أدرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta) : y = x + 2$  .

## حل الموضوع الرابع

التمرين الأول:

نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة الآتية: (E)  $11x - 5y = 2$ .....

(1) أ - البرهان أن إذا كانت الثنائية  $(x; y)$  من  $\mathbb{Z}^2$  حلا للمعادلة (E) فإن  $y \equiv 4[11]$ .

لدينا (E) تكافئ  $5y \equiv 2[11]$  ومنه  $6y \equiv 2[11]$  إذن  $2 \times 6y \equiv 2 \times 2[11]$  ومنه  $y \equiv 4[11]$ .

ب - استنتاج حلول المعادلة (E).

مما سبق لدينا  $y \equiv 4[11]$  ومنه  $y = 11k + 4$  ، بالتعويض في المعادلة (E) نجد  $x = 5k + 2$

إذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات  $(x; y)$  حيث :  $\begin{cases} x = 5k + 2 \\ y = 11k + 4 \end{cases}$  حيث  $k$  عدد صحيح .

(2) ليكن  $n$  عددا طبيعيا غير معدوم ، نضع  $a = 5n + 2$  و  $b = 11n + 4$

أ- تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$ .

نفرض أن  $PGCD(a; b) = d$  إذن  $d$  يقسم  $a$  و  $d$  يقسم  $b$  ومنه  $d$  يقسم  $11a - 5b$  نستنتج أن  $d$  يقسم 2

إذن  $d \in \{1; 2\}$ .

ب- تعيين قيم  $n$  بحيث يكون  $PGCD(a, b) = 2$ .

لدينا  $PGCD(a; b) = 2$  ومنه 2 يقسم  $a$  و 2 يقسم  $b$  ومنه 2 يقسم  $b - 2a$  إذن 2 يقسم  $(11n + 4) - 2(5n + 2)$

أي 2 يقسم  $n$  ومنه قيم  $n$  المطلوبة هي  $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{N}^*$  ( أي  $n$  عدد طبيعي زوجي )

ت- استنتاج قيم  $n$  بحيث يكون العددين  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما :

$a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما معناه  $PGCD(a; b) = 1$  وهذا يكافئ  $PGCD(a; b) \neq 2$  ومنه قيم  $n$  المطلوبة

هي  $n = 2\alpha + 1 / \alpha \in \mathbb{N}^*$  ( أي  $n$  عدد طبيعي فردي )

(3) أ- دراسة حسب قيم العدد الطبيعي غير المدموم  $n$  بواقي القسمة الاقليدية للعدد  $7^n$  على 10 .

$$7^0 \equiv 1[10]$$

$$7^1 \equiv 7[10]$$

$$7^2 \equiv 9[10]$$

$$7^3 \equiv 3[10]$$

$$7^4 \equiv 1[10]$$

ومنه نلخص النتائج في الجدول التالي :

قيم $n$	$4k'$	$4k'+1$	$4k'+2$	$4k'+3$
البواقي	1	7	9	3

ب- استنتاج رقم احاد العدد  $7^{2014}$ .

رقم احاد العد هو باقي قسمته على 10 و لدينا  $2014 = 4 \times 503 + 2$  ومنه 2014 يكتب على الشكل  $4k'+2$  إذن حسب الجواب السابق رقم احاد العدد هو 9

ت- تعيين الثنائيات  $(x; y)$  من  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  التي هي حلول المعادلة  $(E)$  وتحقق  $7^{y-2x} \equiv 9[10]$ .

لدينا  $7^{y-2x} = 7^{11k'+4-10k'-4} = 7^{k'} \equiv 9[10]$  و منه  $7^{y-2x} \equiv 9[10]$  تكافئ  $7^{k'} \equiv 9[10]$  ومنه :  $k' = 4\lambda + 2$  ومنه :

$$\begin{cases} x = 5(4\lambda + 2) + 2 = 20\lambda + 12 \\ y = 11(4\lambda + 2) + 4 = 44\lambda + 26 \end{cases} \quad / (k \in \mathbb{Z})$$

التمرين الثاني:

1. ايجاد عدد الطرق لسحب المترشح ثلاثة مواضيع عشوائيا هو  $C_{80}^3 = 82160$

2. حساب احتمال كل من :

A. " يجب المترشح على المواضيع الثلاثة "

$$P(A) = \frac{C_{50}^3}{C_{80}^3} = \frac{19600}{82160} = \frac{245}{1027} \approx 0,24$$

B. " يجب المترشح على موضوعين فقط "

$$P(B) = \frac{C_{50}^2 \times C_{30}^1}{C_{80}^3} = \frac{36750}{82160} = \frac{3675}{8216} \approx 0,45$$

C. " يجب المترشح على موضوع واحد فقط "

$$P(C) = \frac{C_{50}^1 \times C_{30}^2}{C_{80}^3} = \frac{21750}{82160} = \frac{2175}{8216} \approx 0,26$$

D. لا يجيب المترشح على أي موضوع "

$$P(D) = \frac{C_{30}^3}{C_{80}^3} = \frac{4060}{82160} = \frac{406}{8216} \approx 0,05$$

3. إيجاد عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها المترشح لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل يتجاوز 0,99 :

نسمي عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها ومنه نحل المتراجحة :  $1 - \frac{C_{80-x}^3}{C_{80}^3} \geq 0,99$  أي  $\frac{C_{80-x}^3}{C_{80}^3} \geq 0,01$  أي  $C_{80-x}^3 \geq 821,6$

ونجد :  $(80-x)(79-x)(78-x) > 4929$

- من أجل  $x = 61$  نجد :  $(80-61)(79-61)(78-61) = 5814$

- من أجل  $x = 62$  نجد :  $(80-62)(79-62)(78-62) = 4896$

- من أجل  $x = 63$  نجد :  $(80-63)(79-63)(78-63) = 4080$

ومنه قيمة هي 62 ونقول على أنه على المترشح أن يدرس على الأقل 62 موضوع لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه

على الأقل يتجاوز 0,99

**التمرين الثالث:**

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بجدها الأول  $u_0 = \frac{1}{5}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

(1) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$$

$$= \frac{2u_n + 1 - 1}{2u_n + 1} \quad : \text{بتوحيد المقامات نجد}$$

$$= \frac{2u_n}{2u_n + 1}$$

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1} \quad : \text{ومنه}$$

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < \frac{1}{2}$

لدينا :  $0 < u_0 = \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$  محققة

نفرض صحة الخاصية  $p(n)$  أي  $0 < u_n < \frac{1}{2}$  ونبرهن صحة الخاصية  $p(n+1)$  أي  $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

لدينا :  $0 < u_n < \frac{1}{2}$  ، نضرب في العدد 2 :  $0 < 2u_n < 1$  ، بإضافة العدد 1 نجد :  $1 < 2u_n + 1 < 2$

نقلب نجد :  $1 > \frac{1}{2u_n + 1} > \frac{1}{2}$  ، نضرب في العدد -1 نجد :  $-1 < -\frac{1}{2u_n + 1} < -\frac{1}{2}$  ، بإضافة العدد 1 نجد :

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{2} \quad \text{ومنه} \quad 0 < 1 - \frac{1}{2u_n + 1} < \frac{1}{2}$$

(3) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1}$  ، واستنتاج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n + 1} = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n + 1} = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1} \quad \text{لدينا :}$$

اتجاه تغير المتتالية : بما أن  $0 < u_n < \frac{1}{2}$  فإن  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n + 1}$  عدد موجب ومنه المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما

(4) دراسة تقارب  $(u_n)$  :

بما أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

(5) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ- اثبات أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = 6$  .

$$\text{لدينا : } v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1} \quad \text{ومنه}$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = 6$  .

$$\text{ب- كتابة } v_n \text{ بدلالة } n : v_0 = \frac{u_0}{2u_0 - 1} = -\frac{1}{3} \quad \text{ومنه} \quad v_n = -\frac{6^n}{3}$$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$

$$\text{لدينا } u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}} \quad \text{ومنه} \quad v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1} \quad \text{أي} \quad v_n(2u_n - 1) = 3^n u_n \quad \text{أي أن} \quad v_n = u_n(2v_n - 3^n)$$

$$\text{ومنه} \quad u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$$

ومنه بالتعويض نجد :

$$u_n = \frac{\left(\frac{-6^n}{3}\right)}{2\left(\frac{-6^n}{3}\right) - 3^n} = \frac{\left(\frac{-6^n}{3}\right)}{\left(\frac{-2 \times 6^n - 3^{n+1}}{3}\right)} = \frac{-6^n}{-2 \times 6^n - 3^{n+1}} = \frac{3^n \times 2^n}{2 \times 3^n \times 2^n + 3^n \times 3} = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$$

ت- حساب  $\lim u_n$  و حساب  $S_n$  المجموع بدلالة  $n$  حيث :  $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

لدينا :  $\frac{1}{u_n} = \frac{2^{n+1} + 3}{2^n} = 2 + \frac{3}{2^n}$  ومنه  $S_n = \left(2 + \frac{3}{2^0}\right) + \left(2 + \frac{3}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{3}{2^2}\right) + \dots + \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)$

أي أن :  $S_n = 2(n+1) + \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$  ومنه :  $S_n = 2(n+1) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$

أي أن :  $S_n = 2(n+1) - 2\left[\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right]$

التمرين الرابع :

i. دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = x^3 - 3x - 4$

(1) دراسة تغيرات الدالة  $g$  و تشكيل جدول تغيراتها :

• النهايات :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$

• المشتقة : الدالة  $g$  تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة هي :  $g'(x) = 3x^2 - 3$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= \frac{3}{3} \\ x^2 &= 1 \\ x &= \sqrt{1} = \{-1, +1\} \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$1$	$-1$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$

ونلخص إشارة المشتقة في الجدول التالي :

● تشكيل جدول التغيرات :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$-2$	$-6$	$+\infty$	

(2) التبين أن المعادلة  $g(x)=0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $2 < \alpha < 2,3$

الدالة  $g$  مستمرة و متزايدة على المجال  $[2; 2,3]$  ولدينا :  $g(2) = -2$  ،  $g(2,3) = 1,27$  أي  $g(2) \times g(2,3) < 0$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $2 < \alpha < 2,3$  .

(3) استنتاج إشارة  $g(x)$  :

من جدول التغيرات نستنتج إشارة  $g(x)$  ونوضحها في الجدول الموالي :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$-2$	$-6$	$0$	$+\infty$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$ إشارة	$-$	$0$	$+$

ii.  $f$  دالة عددية معرفة على  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) تعيين الاعداد الحقيقية  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D_f$  :  $f(x) = ax + b \frac{cx + d}{x^2 - 1}$

باستخدام احدي الطرق سواء كانت طريقة المطابقة او القسمة الاقليدية نجد :  $g(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

أي :  $a=1$  و  $b=2$  و  $c=1$  و  $d=2$

(2) التبين انه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D_f$  :  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  ، و استنتاج اتجاه تغير الدالة :



$$f'(x) = \frac{3x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 2x^4 - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} : \text{ومنه } f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + 2x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{أي أن :}$$

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $x \cdot g(x)$  ونلخص النتائج في الجدول التالي :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$\alpha$	$+\infty$
إشارة $x$	-	-	0	+	+	+
إشارة $g(x)$	-	-	-	-	0	+
إشارة $\frac{x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$	+	+	0	-	-	+

متزايدة على المجال  $[-\infty; -1[ \cap ]-1; 0] \cap ]\alpha; +\infty[$  ومتناقصة على المجال  $[0; 1[ \cap ]1; \alpha]$

(3) حساب نهايات الدالة  $f$  عند حدود أطراف مجموعة تعريفها المفتوحة واستنتاج معادلات المستقيمات المقاربة .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left( \frac{1}{x^2 - 1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{1}{x^2 - 1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{x^2 - 1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{x^2 - 1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

ومنه  $x = -1$  و  $x = 1$  هما معادلتا المستقيمان المقاربان للمنحنى  $(C_f)$  .

(4) اثبات أن  $y = x + 2$  : مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  :

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0 \text{ ومنه } (\Delta) \text{ مستقيم مقارب مائل لـ } (C_f)$$

(5) تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$  و دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta) : y = x + 2$  :

- جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	$+\infty$	$-1$	$0$	$1$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$0$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

- دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta): y = x + 2$  :

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$1$	$+\infty$
$x+2$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$x^2-1$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)-y$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

✓  $(C_f)$  يقع فوق  $(\Delta)$  على المجالين  $]-2; -1[$  و  $]1; +\infty[$

✓  $(C_f)$  يقع تحت  $(\Delta)$  على المجالين  $]-\infty; -2[$  و  $]-1; 1[$