الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مواضيع لتحضير بكالوريا 2020   من إعداد الأستاذ: زروقي عيسى

الموضـــــوع الســادس

التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1) إذا كان $A(1;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f فإن $f(1-x)=6-f(1+x)$

2) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بــ $g(x)=e^{-x}.\ln\left(1+2e^{2x}\right)$ فإن $g(x)=\dfrac{2x}{e^{x}}+\dfrac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{e^{x}}$

3) (v_n)متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=2$ فإن $S_n=v_0^2+v_1^2+v_2^2+....+v_n^2=\left[2\left(\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n+1}}{1-\dfrac{1}{9}}\right)\right]^2$

4) إذا كان قانون احتمال لمتغير عشوائي X

x_i	-2	0	1	3	5
$P(X=x_i)$	a	$\dfrac{2}{13}$	$\dfrac{1}{13}$	b	$\dfrac{3}{13}$

وامله الرياضياتي $E(X)=\dfrac{17}{13}$ فإن $a=\dfrac{3}{13}$ و $b=\dfrac{4}{13}$

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(z-1-\sqrt{3}i\right)\left(z^2+2z+2\right)=0$

2. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، النقط A، B، Cلواحقها : $z_A=-1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=1+\sqrt{3}i$.

أ- اكتب العددان المركبان : z_A و z_C على الشكل الاسي ، استنتج الشكل الاسي لـ z_B .

ب- اكتب العدد المركب $\dfrac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الاسي

ت- استنتج القيمة المضبوطة لــ : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

3. عين النقطة D لاحقة z_D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع .

4. عين العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد : $\left(\dfrac{z_C}{z_A}\right)^n\in\mathbb{R}$.

5. عين (E_1) و (E_2) مجموعتي النقط M من المستوي ذات اللاحقة حيث : $(E_1):|z+1-i|=|\bar{z}+1-i|$ و $(E_2):\arg(z)=\arg(\bar{z})+\pi+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{R}$

التمرين الثالث:

i. يحتوي كيس U_1 على 9 كريات لا نفرق بينها باللمس 4 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء و كرتان حمرواتان ونسحب عشوائيا وفي أن واحد 3 كريات من الكيس وليكن المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة بالعدد $2n-1$ حيث n عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس U_1 - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$.

ii. يحتوي كيس U_2 على 10 كريات لا نفرق بينها باللمس 7 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء ، نسحب كرية عشوائيا من الكيس U_2 ثم نضعها في الكيس U_1 بعد تسجيل لونها ثم نسحب كرية من الكيس U_1

1. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء .
2. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء.

التمرين الرابع :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x}{x-1}\ln|x-1|$ ، (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}f(x)$ ثم فسر النهايتين الأخيرتين هندسيا .
2. أ – بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ، ثم بين أن : $f'(x)=\frac{-x}{(x-1)^2}$

   ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها
3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]4;5[$.
4. اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيه كل منهما 2- واكتب معادلتيهما .
5. أرسم المماسين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C_f) .
6. ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : $m(x-1)=2x^2-x-(x-1)\ln|x-1|$
7. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ كما يلي : $h(x)=f(|x|)$

   أ- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{h(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{h(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة h ؟ ثم فسر النتيجة هندسيا .

   ب- بين أن الدالة h زوجية ثم ارسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h في نفس المعلم السابق .
8. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}\ln(e^x-1)$

   أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن: $g'(x)=e^{-x}f(e^x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

   ب- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}g(x)$ و بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.

حل الموضـــــوع الســادس

التمرين الأول:

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1) إذا كان $A(1;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f فإن $f(1-x)=6-f(1+x)$

الإجابة صحيحة لأنه : إذا كانت $A(1;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) فإنه $f(1-x)+f(1+x)=2(3)$ وهذ يعني أن $f(1-x)=6-f(1+x)$ محققة .

2) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ $g(x)=e^{-x}.\ln(1+2e^{2x})$ فإن $g(x)=\frac{2x}{e^x}+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^x}$

الإجابة صحيحة لأنه : من أجل كل عدد حقيقي : $g(x)=e^{-x}.\ln(1+2e^{2x})$ يعني أن :

$g(x)=e^{-x}.\ln(e^{2x}(e^{-2x}+1))$ ومنه: $g(x)=e^{-x}.\ln(e^{2x})+e^{-x}.\ln(e^{-2x}+1)$ أي: $g(x)=\frac{2x}{e^x}+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^x}$

3) (v_n)متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=2$ فإن $S_n=v_0^2+v_1^2+v_2^2+....+v_n^2=\left[2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1}{9}}\right)\right]^2$

الإجابة خاطئة لأن : المجموع هو مجموع حدود متتابعة من مربعات متتالية هندسية هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها مربع أساس المتتالية الأولى أي أن : $S_n=v_0^2\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{9}-1}=4\left[\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}-1}{-\frac{8}{9}}\right]=-\frac{9}{2}\left[\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}-1\right]$

4) إذا كان قانون احتمال لمتغير عشوائي X

x_i	-2	0	1	3	5
$P(X=x_i)$	a	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	b	$\frac{3}{13}$

وامله الرياضياتي $E(X)=\frac{17}{13}$ فإن $a=\frac{3}{13}$ و $b=\frac{4}{13}$

الإجابة خاطئة لأنه : لو عوضنا القيمتين في الامل الرياضياتي نجده $\frac{22}{13}$ وهو يختلف عن $\frac{17}{13}$

$E(X)=-2\left(\frac{3}{13}\right)+0\left(\frac{2}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}\right)+3\left(\frac{4}{13}\right)+5\left(\frac{3}{13}\right)=\frac{22}{13}$.

التمرين الثاني:

1. حل المعادلة : $(z-1-\sqrt{3}i)(z^2+2z+2)=0$:

$$(z-1-\sqrt{3}i)(z^2+2z+2)=0$$

$(z^2+2z+2)=0$ أو $(z-1-\sqrt{3}i)=0$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4(1)(2)=-4=4i^2$ أو $\boxed{(z=1+\sqrt{3}i)}$

$\boxed{(z_1=-1+i)}$ ، $\boxed{(z_2=-1-i)}$ أو $\boxed{(z=1+\sqrt{3}i)}$

2. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، النقط A ،B ،C لواحقها : $z_A=-1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=1+\sqrt{3}i$.

أ- كتابة العددان المركبان : z_A و z_C على الشكل الاسي ،و استنتاج الشكل الاسي لـ z_B:

$Arg(z_A)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi;(k\in\mathbb{Z});|z_A|=\sqrt{2}$ ومنه : $\boxed{z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

$Arg(z_c)=\frac{\pi}{3}+2k\pi;(k\in\mathbb{Z});|z_c|=2$ ومنه : $\boxed{z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

لدينا : $\boxed{z_B=\overline{z_A}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

ب- كتابة العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الاسي:

الشكل الجبري : $\frac{z_c}{z_A}=\frac{1+\sqrt{3}i}{-1+i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{-1+i}\times\frac{-1-i}{-1-i}=\boxed{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}$

الشكل الاسي : $\left|\frac{z_c}{z_A}\right|=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$; $Arg\left(\frac{z_c}{z_A}\right)=Arg(z_c)-Arg(z_A)=\frac{15\pi}{12}+2k\pi;(k\in\mathbb{Z})$ ومنه

$$\boxed{\frac{z_c}{z_A}==\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}}$$

ت- استنتاج القيمة المضبوطة لـ : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:

$\frac{z_c}{z_A}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)-i\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ولدينا : $\frac{z_c}{z_A}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ومنه :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

3. تعيين النقطة D لاحقة z_D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع :

حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي اضلاع معناه : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ ومنه :

$$z_C-z_A=z_D-z_B \Rightarrow z_D=z_C-z_A+z_B=\left(1+\sqrt{3}i\right)-\left(-1+i\right)+\left(-1-i\right)=\boxed{1+i\left(\sqrt{3}-2\right)}$$

4. تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد : $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n\in\mathbb{R}$:

$$\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}\right)^n=\sqrt{2}^n e^{-i\frac{5n\pi}{12}} \quad \text{ومنه} \quad \sqrt{2}^n e^{-i\frac{5n\pi}{12}}=\sqrt{2}^n\left[\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)\right]$$

$\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n\in\mathbb{R}$ يكافئ $\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)=0$ ومنه $n=12k'$ حيث $(k'\in\mathbb{N})$.

5. تعيين (E_1) و (E_2) مجموعتي النقط M من المستوي ذات اللاحقة حيث : $(E_1):|z+1-i|=|\bar{z}+1-i|$ و

$(E_2):\arg(z)=\arg(\bar{z})+\pi+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{R}$

- $|z+1-i|=|\bar{z}+1-i|$ يكافئ $|z-(-1+i)|=|\bar{z}-(-1+i)|$ أي $|z-z_A|=|\overline{z-z_A}|$ ومنه $|z-z_A|=|z-\overline{z_A}|$

ومنه $|z-z_A|=|z-z_B|$ وبالتالي $AM=BM$ ومنه مجموعة النقط (E_1) هي محور القطعة $[AB]$

- $\arg(z)=\arg(\bar{z})+\pi+2k\pi$ تكافئ $\arg(z)=-\arg(z)+\pi+2k\pi$ ومنه $2\arg(z)=\pi+2k\pi$

ومنه $\arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي $(\vec{i};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ وبالتالي مجموعة النقط (E_2) هي محور التراتيب ما عدا المبدأ

التمرين الثالث:

i. تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي وحساب امله الرياضياتي $E(X)$:

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X=2n-1$ ومنه $\{1;3;5;7\}$ حيث n عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس U_1

x_i	1	3	5	7	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$	$\frac{84}{84}=1$

$$E(X)=1\left(\frac{4}{84}\right)+3\left(\frac{30}{84}\right)+5\left(\frac{40}{84}\right)+7\left(\frac{10}{84}\right)=\frac{4+90+200+70}{84}=\frac{364}{84}$$

ii. ‏-1 احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء هو $\frac{1}{5}$.

-2 احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء هو $\frac{1}{7}$.

التمرين الرابع :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x}{x-1}\ln|x-1|$ ، (C_f) منحناها البياني في معلم متعاود ومتجانس .

1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ و تفسير النهايتين الأخيرتين هندسيا:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(1-(x-1)\ln(x-1)\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x\ln x=0$

التفسير : المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=1$.

2. أ – التبيين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ،و تبيين أن : $f'(x)=\frac{-x}{(x-1)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ و عليه ودالتها المشتقة هي : $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}=\frac{-x}{(x-1)^2}$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها :

لندرس إشارة $f'(x)$: $f'(x)=0$ يكافئ $\frac{-x}{(x-1)^2}=0$ أي $-x=0$ ومنه $x=0$ ونلخص النتائج في جدول :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;1[\cup]1;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

3. التبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]4;5[$.

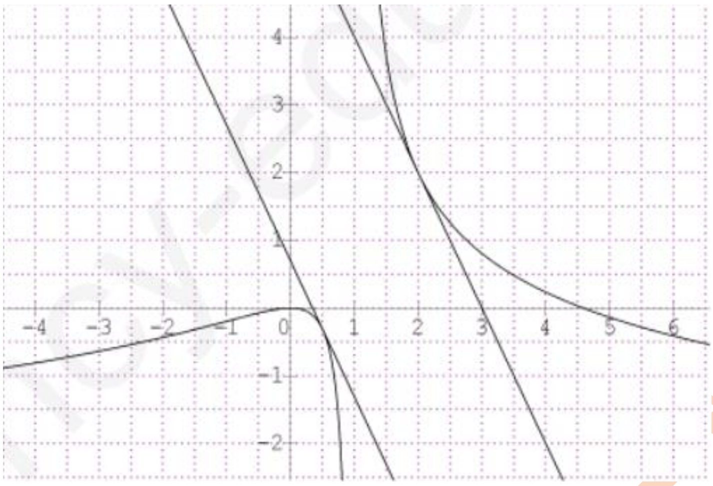
الدالة f مستمرة ورتيبة على $[4;5]$ و لدينا $f(4)=0,2$ ، $f(5)=-0,14$ ومنه $f(4)\times f(5)\prec 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]4;5[$.

4. اثبات المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيه كل منهما 2- واكتب معادلتيهما .

مماسين معامل توجيه كل منهما 2- معناه $f'(x)=-2$ **أي** $\frac{-x}{(x-1)^2}=-2$ بعد الحل نجد $x_1=\frac{1}{2}$ و $x_2=2$

ومنه : $(\Delta):y=-2x+6$ و $(\Delta'):y=-2x+\ln 2$

5. رسم المماسين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C_f) .



6. المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : $m(x-1)=2x^2-x-(x-1)\ln|x-1|$

$$m=\frac{2x^2-2x-(x-1)\ln|x-1|}{(x-1)}$$

$$=\frac{2x-2x}{(x-1)}-\ln|x-1|$$

$$=\frac{2x(x-1)-x}{(x-1)}-\ln|x-1|$$

$$=2x+\frac{x}{(x-1)}-\ln|x-1|$$

$$-2x+m=\frac{x}{(x-1)}-\ln|x-1|$$

ومنه $2x+m=f(x)$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y=-2x+m$

$m\in]-\infty;\ln 2[$ تقبل حلين مختلفين

$m=\ln 2$ تقبل حل مضاعف

$m\in]\ln 2;6[$ لا تقبل حلول

$m=6$ تقبل حل مضاعف

$m\in]6;+\infty[$ تقبل حلين مختلفين

7. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ كما يلي : $h(x)=f(|x|)$

أ- حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{h(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{h(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة h ؟ ثم فسر النتيجة هندسيا :

$$h'(0)=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{h(x)}{x}$$ **ومنه** $h'(0)=f'(0)=0$

$$h'(0)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{h(x)}{x}$$ **ومنه** $h'(0)=f'(0)=0$

نستنتج أن الدالة h تقبل الاشتقاق عند 0 وتقبل مماس أفقي

ب- التبيين أن الدالة h زوجية و ارسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h في نفس المعلم السابق :

لدينا D_h متناظرة بالنسبة للمبدأ ولدينا : $h(-x)=f(|-x|)=f(x)=h(x)$ ومنه h دالة زوجية

8. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}\ln(e^x-1)$

أ- التبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن: $g'(x)=e^{-x}f(e^x)$ و الاستنتاج اتجاه تغير الدالة g :

$$\begin{aligned} g'(x)&=e^{-x}f(e^x-1)+\frac{e^x}{e^x-1}\times e^x\\ &=e^{-x}\left(\frac{e^x}{e^x-1}-\ln(e^x-1)\right)\\ &=e^{-x}f(e^x)\end{aligned}$$

ب- حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}g(x)$ و التبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ و تشكيل جدول تغيرات الدالة g:

دراسة إشارة $e^{-x}f(e^x)$:

لدينا $e^{-x}\succ 0$ نضع $k(x)=f(e^x)$ ومنه الدالة k عبارة عن مركب دالتين $f(x)$ والاسية

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
e^x			$+$		
$k'(x)$			$-$		
$k(x)$	$+\infty$		$\searrow$		$-\infty$

ومنه نقطة تقاطعه مع محور الفواصل $k(x)=0$ أي $f(e^x)=0$ يكافئ ومنه $e^x=\alpha$ ومنه $x=\ln\alpha$

جدول الإشارة :

x	0		$\ln\alpha$		$+\infty$
$k(x)$		$+$	|	$-$	

ومنه الدالة g متزايدة تماما في المجال $]-\infty;\ln\alpha]$ ومتناقصة تماما في المجال $[\ln\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=-\infty$

x	0		$\ln\alpha$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	|	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0