الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | ثانوية فارس بن مهل الشهبونية

امتحان البكالوريا التجريبية | دورة ماي 2015

الشعبة : رياضيات + تقني رياضي

اختبار في مادة الرياضيات | **المدة : 4ساعات ونصف**

على كل مترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين .

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

N عدد طبيعي غير معدوم يكتب $\overline{abcca}^{5}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 ويكتب $\overline{bbab}^{8}$ في نظام التعداد ذي الأساس 8.

1) بين أنَ N يحقق : $309a+15c=226b$.

2) بين أن العدد 3 قاسم للعدد b.

3) فيما يلي نفرض أنَ : $b=3$.

أ) بين أن، $309(a-2)=60-15c$.

ب) استنتج أن العدد 5 قاسم للعدد $(a-2)$ ثم استنتج كلا من a و c .

ج) أكتب العدد N في نظام التعداد ذي الأساس 10.

التمرين الثاني :(04 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط B, A و I التي لواحقها على الترتيب ، $z_A=-2$ ، $z_B=-1+i$ و $z_I=i$.

من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq -2$ نضع : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$

حيث M صورة العدد المركب z و M' صورة العدد z' .

1- أ) تحقق من أن : $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$.

ب) بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .

ج) عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون z' تخيلا صرفا.

2- أ) تحقق من أنَ : $z'-i=\dfrac{1-i}{z+2}$.

ب) استنتج أنَ : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ وان $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})\equiv -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

ج) بين أنَه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها .

3- لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

أ) بين أن النقطة E تنتمي إلى (Γ) ثم بين أن $(\vec{u},\overrightarrow{AE})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

ب) باستعمال نتائج السؤال 2) أنشئ النقطة E' المرفقة بالنقطة E .

☜ **التمرين الثالث (05 نقاط)**

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة** بـ : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<\frac{1}{2}$

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ثم بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة

ج) هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$.

ج) **أحسب عبارة** v_n **بدلالة** n **ثم استنتج أن** $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ **ثم أحسب** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

☜ **التمرين الرابع : (07 نقاط)**

I. نعتبر الدالة العددية g **المعرفة على المجموعة** $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) **أحسب** $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا **ثم أحسب** $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x)=\frac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$. ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}-\ln(1+e^{-x})-x$.

4) أ) **أحسب** $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-(-x+1)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

5) **أرسم** (Δ) **و** (C_g).

6) **استنتج إشارة** $g(x)$ عندما يتغير x **في المجموعة** $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$

1) برهن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ **ثم أحسب** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) بيَن أنَه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ ثمَ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

3) تحقق أنَه من أجل كل عدد حقيقي x $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ **ثم أحسب** : $\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$.

4) **أحسب** $\int_{-\ln 3}^{0}f(x)\,dx$

☜ **<u>الموضوع الثاني</u>**

☜ **<u>التمرين الأول (04 نقاط)</u>**

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي حيث $\theta \in [0;®[$.

نعتبر الأعداد المركبة : $z_0 = r(-\cos\theta + i\sin\theta)$ ، $z_1 = r^2(\sin\theta + i\cos\theta)$ و $z_2 = \sqrt{3}(1+i)$.

1) أكتب كلا من الأعداد z_1, z_0 و z_2 على الشكل المثلثي .

2) أ) عين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1 = \overline{z_0}$.

ب) عيِّن عندئذ قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا .

3) نفرض $r = 1$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$.

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط B, A و C التي لواحقها : z_1, z_0 و z_2 على الترتيب .

أ) عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C,-1)\}$.

ب) عيَن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث ، $\left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 3$

☜ **<u>التمرين الثاني :(04 نقاط)</u>**

☜ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 5x - 6y = 3$

-1 أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

-2 a و b عددان طبيعيان حيث :

$a = \overline{1\sim0\sim00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\sim\ 0\sim}$ في النظام ذو الأساس 5.

- عين ~ و حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) .

☜ **<u>التمرين الثالث (04 نقاط)</u>**

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ و المستوي $(P): x + y + z - 3 = 0$

1) برهن أن المثلث ABC قائم .

2) برهن أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A .

3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') المستوي العمودي على (AC) و المار من النقطة A .

4) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع كلا من المستويين (P) و (P').

5) أ) نعتبر النقطة $D(0;4;-1)$. بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

ج) بين أنَ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}rad$.

د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A و المستوي (BDC)

☜ **التمرين الرابع :(08 نقاط)**

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وبيَن أنَ : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب) بين أنَه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3- بيَن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.8<\alpha<1.9$.

4- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

5- بيَن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أنَ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

6- أحسب $f(3),f(0)$ ثم أرسم (Δ)، (T) و (C_f).

7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$(E): f(x)=x+m$

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $I_n=\int_0^1 x^ne^{-x+1}dx$.

1- أ) بيَن أنَ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$.

ب) أحسب I_1.

2- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنَ : $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n.

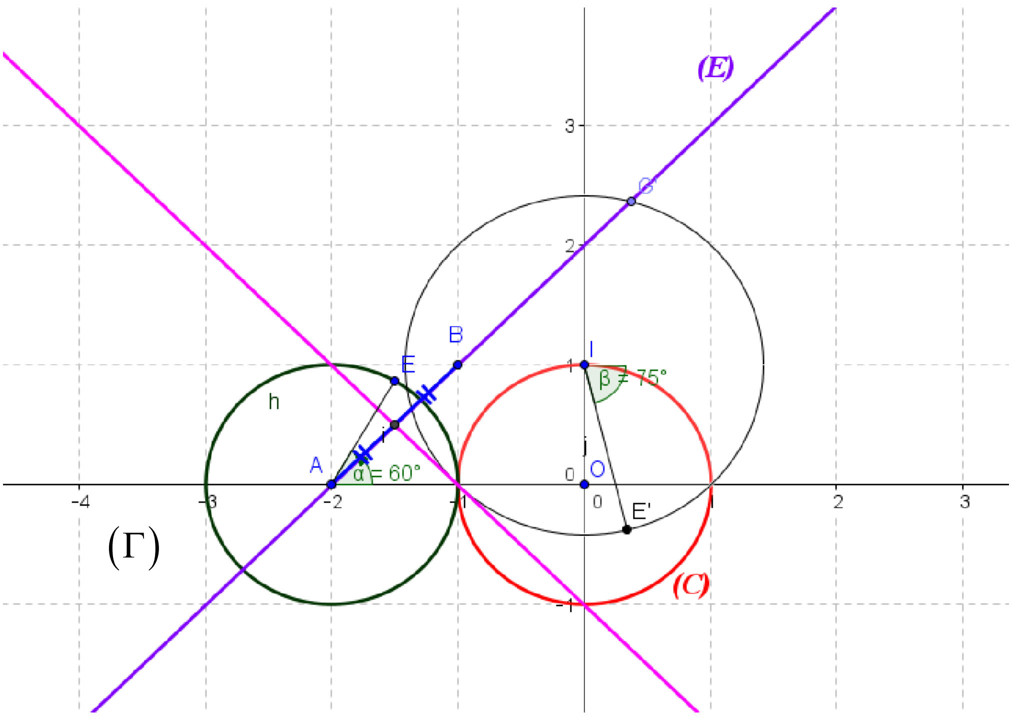
ب) أحسب I_2.

3- أحسب بـcm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ)والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

❁ مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح في البكالوريا جوان 2015 ❁

الإجابة	العلامة
الموضوع الأول	
التمرين الأول	**04**
لدينا : $N=\overline{abcca}^{5}$ و $N=\overline{bbab}^{8}$ 1) تبيان أنَ N يحقق : $309a+15c=226b$ • لدينا : $N=a\times5^4+b\times5^3+c\times5^2+c\times5+a\times5^0=625a+125b+25c+5c+a$ أي $N=626a+125b+30c$ • ولدينا : $N=b\times8^3+b\times8^2+a\times8+b\times8^0=512b+64b+8a+b$ أي $N=577b+8a$ • **إذن** : $626a+125b+30c=577b+8a$ اي $618a+30c=452b$ ومنه $309a+15c=226b$	01
2) تبيان أن العدد 3 قاسم للعدد b: • لدينا : $3(103a+5c)=226b$ - لدينا : $3/226b$ و $3\wedge226=1$ ومنه $3/b$ حسب مبرهنة غوص .	0.25
3) نفرض $b=3$. أ) تبيان أن : $309(a-2)=60-15c$ • لدينا : $3(103a+5c)=226b$ ومنه $309a+15c=678$ • ولدينا : $309a-618=60-15c$ ومنه $309(a-2)=60-15c$	0.75
ب) استنتاج أن العدد 5 يقسم العدد $a-2$: • لدينا : $309(a-2)=5(12-3c)$ $5/309(a-2)$ و $5\wedge309=1$ ومنه $5/(a-2)$ حسب مبرهنة غوص . • استنتاج قيمة a : بما أن $5/(a-2)$ فان : $a-2=5k\,(k\in\mathbb{N})$ ولدينا : $a<5$ أي أنَ : $a=2$. • استنتاج قيمة العدد c: لدينا : $309\times2+15c=678$ ومنه $15c=678-618$ أي $c=4$	2×0.75
ج) كتابة العدد N في نظام التعداد 10: $N=577(3)+8(2)=1747$	0.5
التمرين الثاني	04نقاط
• لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}$ من أجل $z\neq-2$ **1- أ) التحقق من أنَ :** $z'=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$ • لدينا : $z'=\dfrac{iz+i+1}{z+2}=\dfrac{i\left(z+\frac{i}{i}+\frac{1}{i}\right)}{z+2}=\dfrac{i(z+1-i)}{z+2}$	0.25

0.5	**ب) تبيان أنه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فان M' تنتمي الى دائرة $(\mathcal{C})$:** • لدينا : M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM=BM$ • ولدينا : $\|z'\|=\left\|\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right\|=\frac{\|i\|\times\|z+1-i\|}{\|z+2\|}$ أي $OM'=\frac{BM}{AM}=1$ • إذن $OM'=1$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $R=1$
0.5	ج) **تعيين طبيعة المجموعة (E) بحيث يكون z' تخيليا صرفا :** • z' تخيلي صرف معناه $Arg(z')=\frac{\pi}{2}+k\pi$ • ومنه $Arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي $Arg(i)+Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ معناه : $\frac{\pi}{2}+Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه $Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right)=k\pi$ أي $(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM})=k\pi$ • المجموعة (E) هي المستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B. $(E)=(AB)-\{A,B\}$
0.25	**-2 أ) التحقق من أنّ : $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$** • لدينا : $z'-i=\frac{iz+i+1}{z+2}-i=\frac{iz+i+1-iz-2i}{z+2}=\frac{1-i}{z+2}$ أي $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$
0.25	**ب) استنتاج أنّ : $IM'\times AM=\sqrt{2}$:** • لدينا : $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$ ومنه $\|z'-i\|=\left\|\frac{1-i}{z+2}\right\|$ أي $\|z'-i\|=\frac{\|1-i\|}{\|z+2\|}$ وبالتالي : $IM'=\frac{\sqrt{2}}{AM}$ ومنه $IM'\times AM=\sqrt{2}$
0.5	• **استنتاج أنّ : $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$** لدينا : $z'-i=\frac{1-i}{z+2}$ ومنه $Arg(z'-i)=Arg\left(\frac{1-i}{z+2}\right)$ أي $Arg(z'-i)=Arg(1-i)-Arg(z+2)$ ومنه $Arg(z'-i)+Arg(z+2)=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ أي $(\vec{u},\overrightarrow{IM'})+(\vec{u},\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$
0.5	**ج) تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 فان النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها :** • لدينا : M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 معناه $AM=1$ • ولدينا : $IM'\times AM=\sqrt{2}$ أي $IM'=\sqrt{2}$ ومنه M' تنتمي إلى دائرة مركزها I ونصف قطرها $R=\sqrt{2}$

0.25	**-3** لدينا : $z_E=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **أ) تبيان أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ):** • **لدينا :** $AE=\lvert z_E-z_A\rvert=\left\lvert-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right\rvert=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ ومنه $E\in(\Gamma)$
0.5	• **تبيان أن :** $(\vec{u},\overrightarrow{AE})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ **:** لدينا : $z_{\overrightarrow{AE}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي : $(\vec{u},\overrightarrow{AE})=arg(z_{\overrightarrow{AE}})=Arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أي $(\vec{u},\overrightarrow{AE})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$
0.5	**ب) انشاء النقطة E' المرفقة بالنقطة E :** **لدينا :** $EE'=\sqrt{2}$ ولدينا : $(\vec{u},\overrightarrow{IE'})+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ أي $(\vec{u},\overrightarrow{IE'})=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{IE'})=-\frac{7\pi}{12}[2\pi]$ 
05نقاط	**التمرين الثالث**
0.25	• لدينا : $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$ **-1 التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n،** $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

	- لدينا : $1-\dfrac{1}{2u_n+1}=\dfrac{2u_n+1-1}{2u_n+1}=\dfrac{2u_n}{2u_n+1}=u_{n+1}$ ومنه : $u_{n+1}=1-\dfrac{1}{2u_n+1}$
0.75	**2- أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0<u_n<\dfrac{1}{2}$** نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . 1- من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\dfrac{1}{5}$ و $0<\dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{2}$ أي $0<u_0<\dfrac{1}{2}$ اذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$. 2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أنَ : $0<u_n<\dfrac{1}{2}$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ : $0<u_{n+1}<\dfrac{1}{2}$. - لدينا : $0<u_n<\dfrac{1}{2}$ ومنه $0<2u_n<1$ أي $1<2u_n+1<2$ وبالتالي $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2u_n+1}<1$ إذن $-1<-\dfrac{1}{2u_n+1}<-\dfrac{1}{2}$ وأخيرا : $0<1-\dfrac{1}{2u_n+1}<\dfrac{1}{2}$ أي $0<u_{n+1}<\dfrac{1}{2}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة . 3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.
0.25	**ب) التحقق انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$** • لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n}{2u_n+1}-u_n=\dfrac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\dfrac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$.
0.5	• **تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة :** ندرس اشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$ - لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ولدينا : $0<u_n<\dfrac{1}{2}$ ومنه $-1<-2u_n<0$ أي $0<1-2u_n<1$ وبالتالي : $0<u_n(1-2u_n)<\dfrac{1}{2}$ - ولدينا : $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2u_n+1}<1$ ومنه $0<\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}<\dfrac{1}{2}$ - أي $u_{n+1}-u_n>0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة.
0.5	**ج) دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\dfrac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\dfrac{1}{2}$. • **تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{1}{2}$

0.75

3- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية :

- لدينا : $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}$

أي $v_{n+1}=\frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\frac{3\times 3^n\times\frac{2u_n}{2u_n+1}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+1}-1}=\frac{\frac{6\times 3^n\times u_n}{2u_n+1}}{\frac{4u_n-2u_n-1}{2u_n+1}}$

$v_{n+1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{\cancel{2u_n+1}}\times\frac{\cancel{2u_n+1}}{2u_n-1}=6\times\frac{3^n\times u_n}{2u_n-1}=6v_n$ ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=6$

وحدها الأول $v_0=\frac{3^0\times u_0}{2u_0-1}=\frac{1\times\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}-1}=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{1}{3}$

0.5

ب) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

- لدينا : $v_n=v_0\times q^n=-\frac{1}{3}\times 6^n$

0.75

- **استنتاج أنَ : $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$**

- لدينا : $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ ومنه $2u_nv_n-v_n=3^nu_n$ أي $2u_nv_n-3^nu_n=v_n$
- ومنه $\left(2v_n-3^n\right)u_n=v_n$ وبالتالي : $u_n=\frac{v_n}{2v_n-3^n}$

إذن : $u_n=\frac{-\frac{1}{3}\times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3}\times 6^n\right)-3^n}=-\frac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}$ ومنه

$u_n==-\frac{6^n}{-2\times 6^n-3\times 3^n}=\frac{2^n\times 3^n}{2\times 3^n\times 2^n+3\times 3^n}$ أي $u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

0.5

- حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2^n}{2^{n+1}+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{2}$

التمرين الرابع	**07 نقاط**

I. لدينا : $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\ln\left(e^x+1\right)$

1) حساب النهايات :

- **حساب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$:**

0.25 0.25	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1} - ln\left(e^x+1\right)\right) = 0$ لأنّ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(e^x+1\right) = 0 \end{cases}$ - **التفسير الهندسي** : $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني $\left(C_g\right)$ بجوار $-\infty$
0.25	• **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1} - ln\left(e^x+1\right)\right) = -\infty$ لأنّ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(e^x+1\right) = +\infty \end{cases}$
0.5	**2) تبيان أنّ $g'(x) = \frac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$** • لدينا : $g'(x) = \frac{e^x\left(e^x+1\right) - e^x \times e^x}{\left(e^x+1\right)^2} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}-e^{2x}-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ أي $g'(x) = \frac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$
0.25	• **استنتاج اتجاه تغير الدالة g:** $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline -e^{2x} & & - & \\ \hline g'(x) & & - & \end{array}$
0.5	• **جدول التغيرات :** $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline g'(x) & & - & \\ \hline g(x) & 0 & \searrow & -\infty \end{array}$
0.5	**3) تبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} + ln\left(1+e^{-x}\right) - x$** • لدينا : $g(x) = \frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} - ln\left[e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]$ ومنه : $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - ln\left(e^x\right) - ln\left(1+e^{-x}\right)$ أي $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} + ln\left(1+e^{-x}\right) - x$

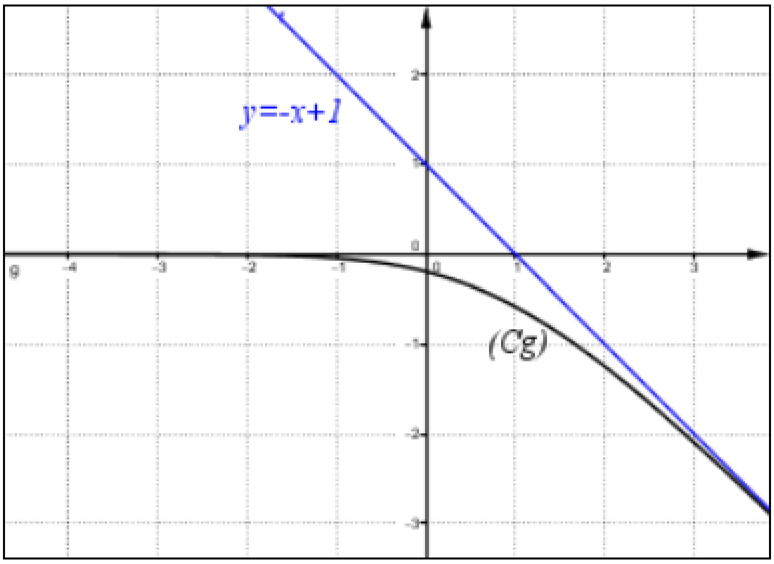
4) أ) **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]$ **:**

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1+e^{-x}}-ln\left(1+e^{-x}\right)-x+x-1\right]$ 0.5

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(-x+1)\right]=0$ لانَ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(1+e^{-x}\right)=0\end{cases}$

- **تفسير النتيجة :** المستقيم ذي المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحني $\left(C_g\right)$ عند $-\infty$. 0.25

5) **الرسم :** 0.75



6) **استنتاج اشارة** $g(x)$ **:** 0.25

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$

.II لدينا : $f(x)=e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)$

1) **البرهان أنَ :** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ 0.25

- نضع $e^{x}=t$ وبالتالي عندما $x\to-\infty$ فانَ : $t\to 0$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{ln(t+1)}{t}=1$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

- **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **:** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}ln\left(1+e^{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}=0$ 0.25

2) **تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي** x ، $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$ **:** 0.5

- لدينا : $f'(x)=-e^{-x}\times ln\left(e^{x}+1\right)+e^{-x}\times\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}=e^{-x}\left(\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}-ln\left(e^{x}+1\right)\right)$

أي $f'(x)=e^{-x}\times g(x)$

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :**

اشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$+\infty$ $-\infty$
$g(x)$	$-$
$f'(x)$	$-$

0.25

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$+\infty$ $-\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

0.5

3) التحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

0.25

- حساب $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$:

$$\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\int_{-ln3}^{0}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left[-ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_{-ln3}^{0}=-ln2+ln\left(1+e^{ln3}\right)$$

أي $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=-ln2+ln4=-ln2+2ln2=ln2$

0.5

4) حساب $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}f(x)dx$: بالمكاملة بالتجزئة

$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx$$

نضع : $u'(x)=e^{-x}$ ومنه $u(x)=-e^{-x}$

و $v(x)=ln\left(e^x+1\right)$ ومنه $v'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

إذن :

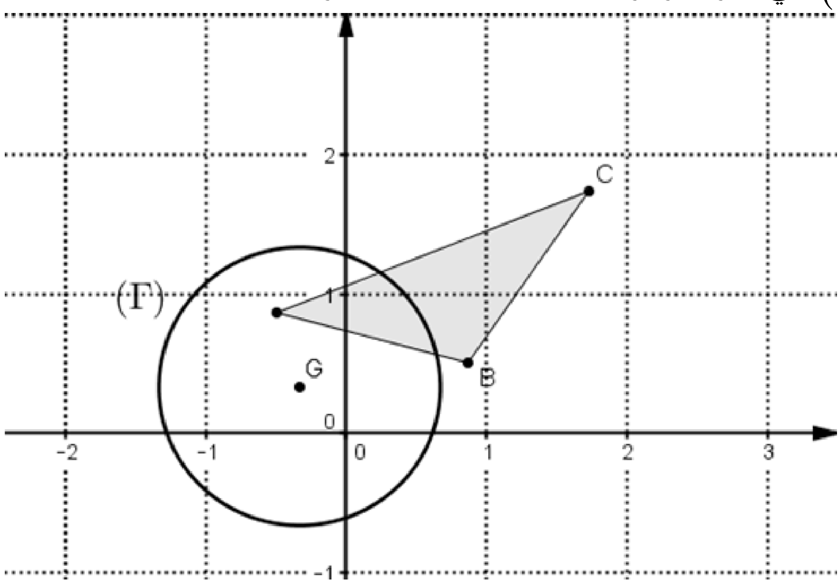
$$\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=\int_{-ln3}^{0}e^{-x}ln\left(e^x+1\right)dx=\left[-e^{-x}ln\left(e^x+1\right)\right]_{-ln3}^{0}-\int_{-ln3}^{0}-e^{-x}\times\frac{e^x}{e^x+1}dx$$

أي $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+e^{ln3}ln\left(e^{-ln3}+1\right)+\int_{-ln3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx$

$\displaystyle\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=-ln2+3ln\left(\frac{1}{3}+1\right)+ln2=3ln\frac{4}{3}$ إذن $\displaystyle\int_{-ln3}^{0}f(x)dx=3ln\frac{4}{3}$

0.5

الإجابة	العلامة
التمرين الأول :	**04 نقاط**
• لدينا : $z_0=r(-\cos\theta+i\sin\theta)$ ، $z_1=r^2(\sin\theta+i\cos\theta)$ و $z_2=\sqrt{3}(1+i)$ حيث $r\in\mathbb{R}^{*+}$ و $\theta\in[0;\pi]$ **1) كتابة الأعداد z_1,z_0 و z_2 على الشكل المثلثي :** • لدينا : $z_0=r\left(\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\right)$ $z_1=r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$ $z_2=\sqrt{3}\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	3×0.5
2) أ) تعيين العددين الحقيقيين r و θ بحيث يكون : $z_1=\overline{z_0}$ • لدينا : $\overline{z_0}=r\left(\cos(-\pi+\theta)+i\sin(-\pi+\theta)\right)$ - $z_1=\overline{z_0}$ معناه $r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=r\left(\cos(-\pi+\theta)+i\sin(-\pi+\theta)\right)$ ومنه : $\begin{cases}r^2=r\\ \frac{\pi}{2}-\theta=-\pi+\theta+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$ أي $\begin{cases}r^2-r=0\\ -2\theta=-\frac{\pi}{2}-\pi+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$ وبالتالي : $\begin{cases}r=0\vee r=1\\ -2\theta=-\frac{3\pi}{2}+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$ إذن $\begin{cases}r=1\\ \theta=\frac{3\pi}{4}-k\pi\,(k\in\{0;1\})\end{cases}$ من أجل $k=0$ نجد : $\theta=\frac{3\pi}{4}$ (مقبول لأنّ $\theta\in[0;\pi]$) من أجل $k=1$ نجد $\theta=\frac{3\pi}{4}-\pi$ (مرفوض) $z_1=\overline{z_0}$ معناه $\begin{cases}r=1\\ \theta=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$	0.75

0.25	ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقيا : • لدينا : $\frac{z_0}{z_1}=\frac{1\left(cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\,sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}{1^2\left(cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\,sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$ $\frac{z_0}{z_1}=cos\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\,sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)=cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}$
0.25	اي $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n=cos\frac{n\pi}{2}+i\,sin\frac{n\pi}{2}$ • إذن $\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^n$ حقيقي معناه $sin\frac{n\pi}{2}=0$ أي $\frac{n\pi}{2}=k\pi$ وبالتالي : $n=2k\left(k\in\mathbb{N}\right)$
0.5	**3)** لدينا : $r=1$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$ • إذن : $z_0=-cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_1=sin\frac{\pi}{3}+i\,cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ **أ) تعيين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;2),(C;-1)\}$** • لدينا : $z_G=\frac{2z_A+2z_B-z_C}{2+2-1}=\frac{-1+\cancel{i\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{3}}+i-\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{i\sqrt{3}}}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$
0.75	**ب) تعيين طبيعة المجموعة (Γ):** • لدينا : $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=3$ معناه $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=3$ ومنه $3MG=3$ أي $MG=1$ وبالتالي (Γ) هي دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها $R=1$ 

التمرين الثاني	04 نقاط
لدينا : $(E): 5x-6y=3$ **1) أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3:** • لدينا : $5x-6y=3$ تكافئ $5x=3+6y$ أي $5x=3(1+2y)$ • لدينا : $3/5x$ و $3\wedge 5=1$ فإن $3/x$ حسب مبرهنة غوص أي x مضاعف للعدد 3	0.25
ب) تعيين حل خاص للمعادلة (E) : • نفرض $x=3$ وبالتالي : $y=\frac{5\times 3-3}{6}=\frac{12}{6}=2$ أي الثنائية $(3;2)$ حل للمعادلة (E)	0.5
• **حل المعادلة (E):** لدينا : $5x-6y=5\times 3-6\times 2$ يكافئ $5x-5\times 3=6y-6\times 2$ أي $(*): 5(x-3)=6(y-2)$ • لدينا : $6/5(x-3)$ و $6\wedge 5=1$ فإن $6/(x-3)$ حسب مبرهنة غوص . أي $x-3=6k\,(k\in\mathbb{Z})$ وبالتالي $x=6k+3\,(k\in\mathbb{Z})$ • من أجل $x=6k+3$ نعوض في المعادلة $(*)$ نجد : $5(6k+3-3)=6(y-2)$ ومنه $y-2=5k\,(k\in\mathbb{Z})$ أي $y=5k+2\,(k\in\mathbb{Z})$ - مجموعة حلول المعادلة : $S=\{(6k+3;5k+2),k\in\mathbb{Z}\}$	0.5
ج) استنتاج حلول الجملة : $(S):\begin{cases}x\equiv -1[6]\\x\equiv -4[5]\end{cases}$ • $\begin{cases}x\equiv -1[6]\\x\equiv -4[5]\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x=6m-1\\x=5n-4\end{cases}$ أي $6m-1=5n-4$ ومنه $5n-6m=3$ ومنه : $n=6k+3$ وبالتالي $x=5(6k+3)-4=30k+11\,(k\in\mathbb{Z})$	0.75
2- لدينا : $a=\overline{1\alpha 0\alpha 00}^{3}$ و $b=\overline{\alpha\beta 0\alpha}^{5}$ • **تعيين $(\alpha;\beta)$ بحيث تكون $(a;b)$ حل للمعادلة (E):** - لدينا : $a=1\times 3^5+\alpha\times 3^4+\alpha\times 3^2=243+81\alpha+9\alpha=243+90\alpha$ ولدينا : $b=\alpha\times 5^3+\beta\times 5^2+\alpha\times 5^0=125\alpha+25\beta+\alpha=126\alpha+25\beta$ مع $\alpha\leq 2$ و $\beta\leq 4$ • **الثنائية $(a;b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a-6b=3$** ومنه $5(243+90\alpha)-6(126\alpha+25\beta)=3$ أي $1215+450\alpha-756\alpha-150\beta=3$ ومنه $-306\alpha-150\beta=-1212$ بعد تقسيم الطرفين على العدد -3 نجد : $102\alpha+50\beta=404$ وبالتالي $(\alpha;\beta)=(2;4)$ حل للمعادلة	0.75 0.75

04 نقاط	التمرين الثالث
0.5	لدينا : $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ و $C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x+y+z-3=0$ **1) البرهان على أنَ المثلث ABC قائم :** - لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$ ولدينا : $AB=\sqrt{(3)^2+(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$ و $BC=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$ إذن : $BC^2=AB^2+AC^2$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة A.
0.5	**2) البرهان على أنَ المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A :** • لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) - إذن $\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{3}{1}=3$ ومنه $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB}\parallel\vec{n}$ وبالتالي $(AB)\perp(P)$ - نعوض بإحداثيات النقطة A في معادلة (P) نجد : $3-2+2-3=0$ أي $A\in(P)$ وبالتالي : **المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A**
0.5	**3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) والمار من النقطة A :** لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P') وبالتالي معادلة للمستوي (P') من الشكل : $3x-3z+d=0$ - تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة A نجد : $3(3)-3(2)+d=0$ ومنه $d=-3$ وبالتالي معادلة للمستوي (P') : $3x-3z-3=0$ أي $x-z-1=0$
0.5	**4) كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P') :** • لدينا : $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x-z-1=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases}z+1+y+z-3=0\\x=z+1\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}x=z+1\\y=-2z+2\end{cases}$ - نضع : $z=t$ وبالتالي : $(\Delta): \begin{cases}x=t+1\\y=-2t+2\\z=t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$
0.5	**5) أ) تبيان أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)** • **لدينا :** $D(0;4;-1)$ **وبالتالي** $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن : - $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=-3(3)+6(3)-3(3)=-18+18=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+9=0$ ومنه $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$ - **وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)**

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$: $$v_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times AD$$ - لدينا : $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ و $AD=\sqrt{(-3)^2+(6)^2+(-3)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$ - أي $v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6}=27uv$ $\quad v_{ABCD}=27uv$	0.5
ج) تبيان أنَ قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}rad$: - لدينا : $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$ وبالتالي : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=6\times 6-3(-6)+6\times 0=36+18=54$ - ولدينا : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\left\Vert\overrightarrow{DB}\right\Vert\times\left\Vert\overrightarrow{DC}\right\Vert\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ أي $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\sqrt{81}\times\sqrt{72}\times cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ $cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)=\frac{54}{9\times 6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $\widehat{BDC}=45^\circ$	0.5
د) حساب مساحة المثلث BDC : - $S_{BDC}=\frac{1}{2}DB\times DC\times sin\,\widehat{BDC}=\frac{1}{2}\times 9\times 6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27us$ - استنتاج المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC): **لدينا :** $v_{ABDC}=\frac{1}{3}\times S_{BDC}\times d\left(A,(BCD)\right)=\frac{1}{3}\times 27\times d\left(A,(BCD)\right)=27$ **ومنه** $d\left(A,(BDC)\right)=\frac{27}{\frac{1}{3}\times 27}=3$ $\quad d\left(A,(BDC)\right)=3$	0.5
التمرين الرابع	**08 نقاط**
I. **لدينا :** $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$ (1 أ) **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$: - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=-\infty$: لأنَ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-(x^2+1)e^{-x+1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\end{cases}$	0.25
• **تبيان أنَ :** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$: **لدينا :** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-(x^2+1)e^{-x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2+1}{e\times e^x}\right)$	0.25

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2}{e^x}\times\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\times\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\end{cases}$

0.5

ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$:

- **لدينا :** $f'(x)=1-\left[2xe^{-x+1}+(x^2+1)(-e^{-x+1})\right]=1-(2x-x^2-1)e^{-x+1}$

وبالتالي : $f'(x)=1+(x^2-2x+1)e^{-x+1}=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

0.25

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$(x-1)^2e^{-x+1}$	$+$
$f'(x)$	$+$

0.5

- **جدول التغيرات :**

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

0.25

2) تبيان أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-(x^2+1)e^{-x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-x+1}+e^{-x+1}\right)=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$

0.5

- **دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):**

لدينا : $f(x)-x=x-(x^2+1)e^{-x+1}-x=-(x^2+1)e^{-x+1}$

إذن $f(x)-x<0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x

0.5

3) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$:

- **لدينا** f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8;1.9]$

ولدينا $f(1.8)=1.8-\left((1.8)^2+1\right)e^{-1.8+1}=-0.11$

$f(1.9)=1.9-\left((1.9)^2+1\right)e^{-1.9+1}=0.03$ وبالتالي $f(1.8)\times f(1.9)<0$

حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8<\alpha<1.9$.

0.5

4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$y = 1\times(x-1) - 1 = x-2$ أي $(T): y = x-2$

01

5) تبيان أنَ $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$:

- لدينا : $f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} + (x-1)^2 \times \left(-e^{-x+1}\right) = (x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$

أي $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$.

- **استنتاج أنَ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :**

- جدول إشارة $f''(x)$:

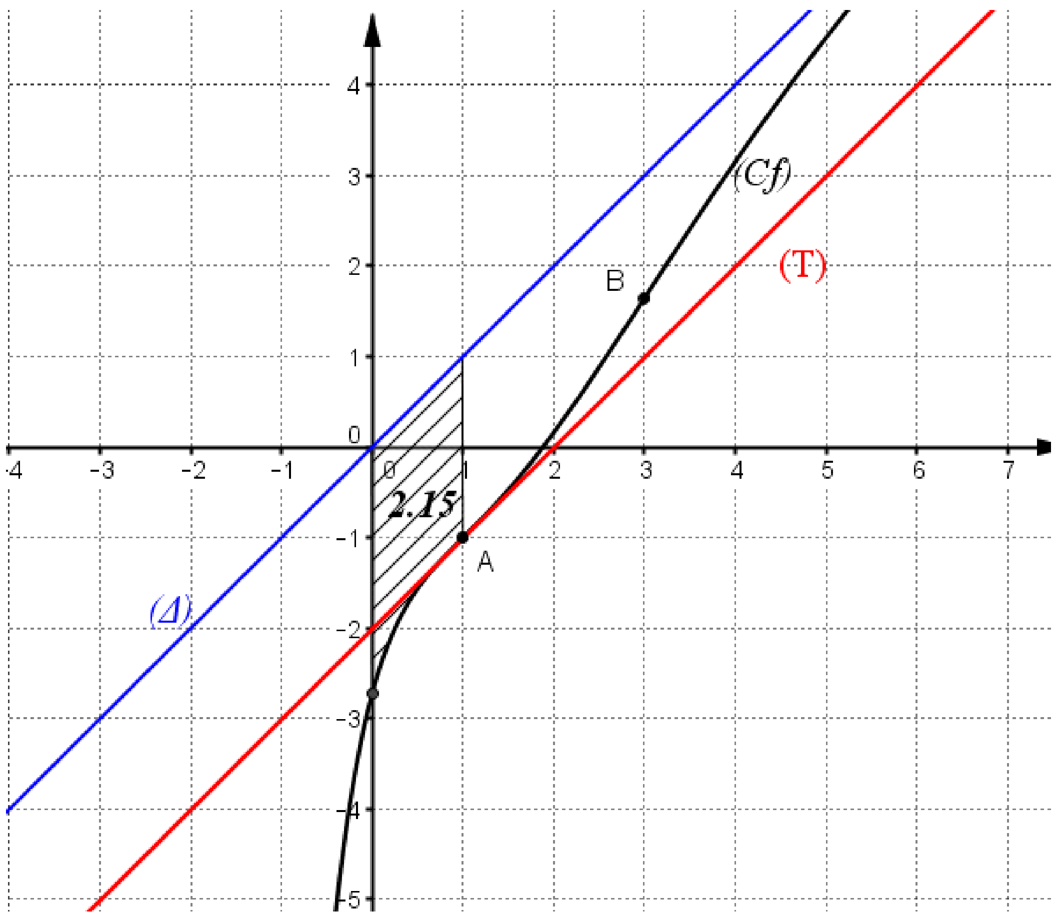
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- **المشتقة الثانية** $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن النقطتين $A(1; f(1)), B(3; f(3))$ نقطتي انعطاف للمنحني (C_f)

01

6) حساب $f(3), f(0)$: $f(3) = 3-9e^{-2} = 1.65, f(0) = -e = -2.71$

الرسم :



01

0.5	**7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x)=x+m$** • هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي لكل من (T) و (Δ) . • إذا كان $m\in]-\infty;-e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا . • إذا كان $m=-e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما . • إذا كان $m\in]-e;0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا . • إذا كان $m\in[0;+\infty[$ المعادلة ليس لها حلا .
0.5	II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$ **1- أ) تبيان أنَ الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x)=xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$:** • لدينا : $G'(x)=-\left[e^{-x+1}-(x+1)e^{-x+1}\right]=-\left(e^{-x+1}-xe^{-x+1}-e^{-x+1}\right)=xe^{-x+1}=g(x)$ ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.
0.25	ب) **حساب I_1** : • لدينا : $I_1=\int_0^1 xe^{-x+1}dx=\left[-(x+1)e^{-x+1}\right]_0^1=-2e^0+e=e-2$
0.5	**2- أ) تبيان أنَ $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$** • لدينا : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx$ نضع : $u(x)=x^{n+1}$ ومنه $u'(x)=(n+1)x^n$ ونضع : $v'(x)=e^{-x+1}$ ومنه $v(x)=-e^{-x+1}$ وبالتالي : $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x+1}\right]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n\left(-e^{-x+1}\right)dx$ ومنه : $I_{n+1}=-1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx=-1+(n+1)I_n$
0.25	**ب) حساب** I_2: $I_2=-1+(1+1)I_1=-1+2(e-2)=2e-5$
0.5	**3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1,x=0$:** $S=\int_0^1[y-f(x)]dx=\int_0^1 x-x+(x^2+1)e^{-x+1}dx=\int_0^1(x^2+1)e^{-x+1}dx$ أي $S=\int_0^1 x^2e^{-x+1}dx+\int_0 e^{-x+1}dx=I_2+\left[-e^{-x+1}\right]_0^1$ $S=(2e-5-1+e)us=(3e-6)cm^2=2.15cm^2$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح BAC 2015 ❀ أستاذ المادة