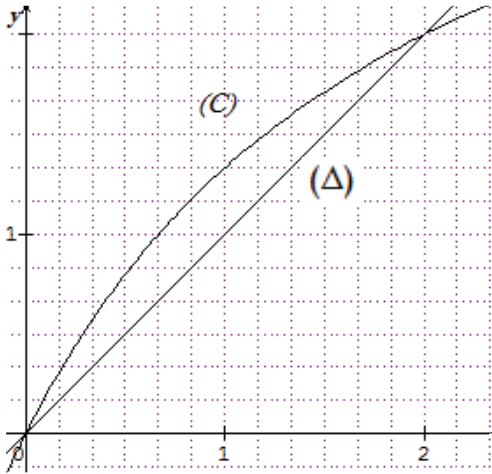


على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{4x}{x+2}$. (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) . وليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة $y = x$.



(U_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بعدها الأول : $U_0 = 1$ من أجل كل عدد طبيعي n . $U_{n+1} = f(U_n)$.

1. أ) تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

ب) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (U_n) (بدون حساب الحدود) موضحا خطوط التمثيل، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها.

2. أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq U_n < 2$.

ب) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على \mathbb{N} ، ماذا تستنتج ؟ ثم أحسب نهاية (U_n) .

3. نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ : $V_n = 1 - \frac{2}{U_n}$.

أ) برهن أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ محددًا حدها الأول V_0 .

ب) أكتب V_n بدلالة n و استنتج عبارة U_n بدلالة n .

4. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|U_n - 2|$.

ثم استنتج أن : $|U_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ و أحسب $\lim U_n$.

5. أحسب المجموعين S_n و S'_n بدلالة n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

$$S'_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \dots + \frac{1}{U_n}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1. صندوق يحتوي على 6 كريات تحمل العدد 1 و 3 كريات تحمل العدد 2 و واحدة تحمل العدد (-2) .
نسحب عشوائيا و في أن واحد كرتين من الصندوق.
1. أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : " الحصول على كرتين تحملان نفس العدد " .

B : " الحصول على كرية على الأقل تحمل العدد 1 " .

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء العددين الظاهرين في الكرتين المسحوبتين .

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضياتي .

11. فيما يلي نعتبر الصندوق يحتوي على 10 كريات منها n كرية تحمل العدد 1 و واحدة تحمل العدد (-2) و

باقي الكريات تحمل العدد 2 .

نسحب عشوائيا و في أن واحد كرتين، و لتكن الحادثة C : "سحب كرتين تحملان نفس العدد "

1. أحسب $P(C)$ بدلالة n .

2. عين قيم n بحيث: $P(C) = \frac{4}{5}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} كثير الحدود $P(Z)$ للمتغير Z حيث :

$$P(Z) = Z^3 - 4Z^2 + 6Z - 4$$

(أ) أحسب $P(2)$ ثم عين العددين الحقيقيين a و b بحيث :

$$P(Z) = (Z - 2)(Z^2 + aZ + b)$$

(ب) حل في \mathbb{C} المعادلة : $P(Z) = 0$.

2. نعتبر في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) النقط A, B, C التي لواحقها على

$$\text{الترتيب : } Z_A = 2, \quad Z_B = 1 - i, \quad \text{و} \quad Z_C = \overline{Z_B}$$

(أ) أكتب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(ب) أكتب Z_C و Z_B على الشكل الأسّي .

$$\text{(ج) تحقق أن : } \left(\frac{Z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1440} + \left(\frac{Z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2019} = \frac{Z_A}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} Z_B$$

3. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z (التي تختلف عن B و C) التي تحقق:

$$\arg\left(\frac{Z_C - Z}{Z_B - Z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

حيث k عدد صحيح.

4. ليكن R الدوران الذي مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C .

(أ) عين زاوية الدوران R .

(ب) أكتب العبارة المركبة للدوران R ثم عين لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R .

(ج) عين طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالدوران R ، محددا عناصرها.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln x$

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$.

2. (أ) أدرس إتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$.

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

2. (أ) لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = x - 1 + \ln x$

أحسب $h(1)$ و أدرس اتجاه تغير الدالة h على $]0; +\infty[$ ، ثم استنتج إشارة $h(x)$.

(ب) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

(ج) استنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة

f و شكل جدول تغيراتها.

4. (أ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة $A(1;0)$.

(ب) أرسم كلا من (Δ) ، (T) و (C) .

5. m عدد حقيقي. المستقيم (Δ_m) حيث : $y = mx - m$ معادلة له .

(أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

(ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = mx - m$ حلان مختلفان.

6. (أ) بإستعمال التكامل بالتجزئة، بين أن : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$.

(ب) أحسب بـ $u.a$ مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتهما:

$$x = e \text{ و } x = 1$$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $14x + 9y = 13$

1. حل في Z^2 المعادلة (E) علما أن الثنائية $(-1; 3)$ حلا خاصا لها.

2. ليكن N عددا طبيعيا حيث يوجد عدنان طبيعيان a و b يحققان:

$$\begin{cases} N = 14a - 9 \\ N = 9b + 4 \end{cases}$$

(أ) بين أن الثنائية $(a; -b)$ حل للمعادلة (E).

(ب) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد N على 126.

3. حل في المجموعة Z^2 المعادلة: $14x + 9y = 130$

4. لتزيين قسم السنة 3 تقني رياضي إشتراك مجموعة تلاميذ القسم في دفع 130 قطعة نقدية حيث دفع كل ذكر 14

قطعة نقدية و دفعت كل أنثى 9 قطع نقدية .

. ماهو عدد الذكور و عدد الإناث في هذا القسم ؟

التمرين الثاني: (05 نقاط)

أ. حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول Z و الوسيط الحقيقي α التالية:

$$(Z - \alpha i)(Z^2 - 4Z + 13) = 0 \quad (E) \dots$$

II. في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) نعتبر النقط A, B, C و G التي

لواحقها على الترتيب: $Z_A = \alpha i, Z_B = 2 + 3i, Z_C = \overline{Z_B}, Z_G = 5$ و

1. بين أن Z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة B بالتشابه الذي مركزه A و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ هي

$$Z_E = \left(\frac{\alpha - 1}{2} \right) + i \left(\frac{5 + \alpha}{2} \right)$$

2. عين Z_F لاحقة النقطة F صورة النقطة G بالدوران R الذي مركزه I منتصف $[AB]$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

3. أحسب $Z_G - Z_A$ و $Z_F - Z_E$ ، ثم أكتب العدد $\frac{Z_G - Z_A}{Z_F - Z_E}$ على شكله الأسّي، ماذا تستنتج؟

4. (أ) بين أن $\frac{Z_F - Z_E}{Z_A - Z_E} = \frac{(2\alpha^2 - 12\alpha + 50)}{(1 - \alpha)^2 + (\alpha - 5)^2} + i \frac{(2\alpha^2 - 10)}{(1 - \alpha)^2 + (\alpha - 5)^2}$

(ب) عين قيمتي α التي من أجلها تكون النقط A, E و F في استقامة.

(ج) من أجل قيمتي α المتحصل عليهما سابقا بين أن A تنتمي إلى الدائرة (C) التي قطرها $[BC]$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على \mathbb{N} بعدها الأول $U_0 = 2$ و بالعلاقة : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n+1$

1. نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على \mathbb{N} بالعلاقة : $V_n = U_n - n$
 1. أ) برهن أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
 - ب) عبر عن V_n ثم U_n بدلالة n ثم أحسب نهاية (U_n) ، ماذا تستنتج؟
2. أحسب بدلالة n المجموع $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$
11. لتكن المتتالية (W_n) المعرفة على \mathbb{N} بالعلاقة : $W_n = \ln(V_n)$
 1. برهن أن المتتالية (W_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
 2. أ) أحسب بدلالة n المجموع : $A_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$
 - ب) استنتج بدلالة n الجداء : $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$
 1. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 2. استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .
11. لتكن الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) . (الوحدة $2cm$)
 1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
 3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .
 4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة O .
 5. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها .
 6. أنشئ المستقيمين (Δ) و (T) و المنحنى (C_f) .
 7. ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $(2x-1)e^{2x} + x = x + m + 1$
 8. أ) بين أن الدالة: $H : x \mapsto (x-1)e^{2x}$ هي دالة أصلية للدالة : $h : x \mapsto (2x-1)e^{2x}$
ب) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الثاني