على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (5 نقاط)

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $4z^2-2z+1=0$

2) ليكن Z عدد مركب حيث : $Z=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$

أ – أكتب كلا من العددين Z و $\overline{Z}$ على الشكل المثلثي ($\overline{Z}$ هو مرافق العدد المركب Z).

ب– نضع $L_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ حيث k عدد صحيح نسبي.

– بين أن $L_k=\frac{1}{2^{k-1}}isin\frac{k\pi}{3}$, ثم استنتج قيمة L_{2019} .

3) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A ، B ذات اللاحقتين $z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $z_B=2-2i\sqrt{3}$ على الترتيب .

أ– علم النقطتين A ، B .

ب– عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

ج– عين طبيعة المثلث ABC .

د– عين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $|z-2+2i\sqrt{3}|=|z-2-2i\sqrt{3}|$ ،ثم أرسمها.

التمرين الثاني : (4 نقاط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E):\dots\dots 5x-6y=3$

1) أ– أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن : x مضاعف للعدد 3 .

ب– استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

ج– استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases}x\equiv -1[6]\\x\equiv -4[5]\end{cases}$

2) عين كل الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2-y^2\leq 56$

3) a و b عددان طبيعيان حيث : $a=\overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b=\overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5.

– عين α و β حتى تكون الثنائية (a,b) حلا للمعادلة (E).

التمرين الثالث : (4 نقاط)

صندوق يحتوي ثلاث كرات خضراء تحمل الرقم 0 ، وكرتان حمراوان تحملان الرقم 5 وكرة واحدة بيضاء تحمل العدد α ، (α عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 5 و 10) ، كل الكرات لا نميز بينها عند اللمس.

سحب لاعب ثلاث كرات في آن واحد

1) احسب احتمال الحوادث التالية :

A : اللاعب يسحب ثلاث كرات من نفس اللون.

B : اللاعب يسحب ثلاث كرات من ألوان مختلفة.

C : اللاعب يسحب كرتين من نفس اللون .

2) اللاعب يربح بالدينار مجموع الأرقام المسجلة على الكرات المسحوبة.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ثلاث كرات " الربح بالدينار الذي يتحصل عليه اللاعب".

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ، وبين أن $P(X=\alpha)=\frac{3}{20}$.

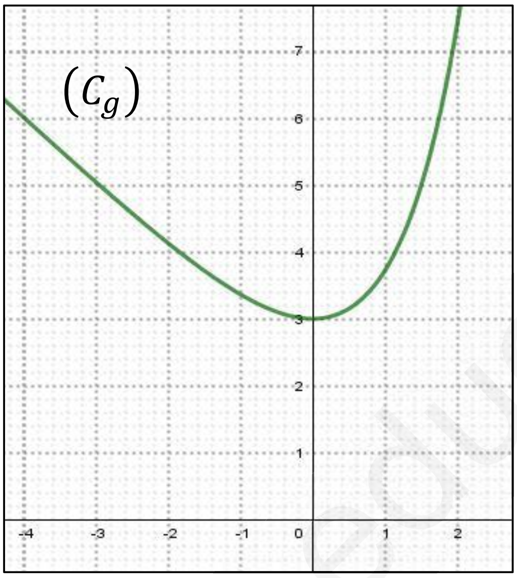
ب- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج- احسب بدلالة α الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X ، وعين قيمة العدد α حتى يربح اللاعب 20 دينارا.

التمرين الرابع : (7 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=ae^x+b-x$ حيث a و b عددان حقيقيان ، الشكل المقابل هو التمثيل البياني لـ (C_g) ممثل للدالة g و (Δ) المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 .



بقراءة بيانية :

1) أ- عين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب- عين $g(0)$ و $g'(0)$.

ج- عين اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

د- عين إشارة الدالة g .

2) أ- عين $g'(x)$ بدلالة a و b .

ب- باستعمال المعطيات السابقة بين أن : $g(x)=e^x+2-x$

ج- احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة التعريف .

د- عين اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

II. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{-x}g(x)$.

ب- أدرس تغيرات الدالة f .

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α حيث : $0<\alpha<\frac{1}{2}$

3) أ- أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$.

ب- أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4) أ- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين احداثياتها.

ب- تحقق أن : $(e^3-1)x-e^3y+5=0$ هي معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة A .

5) أرسم كل من (Δ) , (T) و (C_f).

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, نعتبر النقط $A(3;2;1)$ ، $B(3;5;4)$ ، $C(0;5;1)$.

1) بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

2) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

3) أ- عين احداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

ب- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC) .

ج- نعتبر النقطة $S(2+t;4+t;2-t)$ حيث t عدد حقيقي ، عين العدد t حتى يكون $AS^2=AB^2$.

د- عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4;6;0)$ ، ثم احسب حجمه V .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E)\ ...\ (z+i)(z^2-8z+25)=0$$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B ، C و D هي صور الأعداد المركبة $z_A=1$ ، $z_B=-i$، $z_C=4+3i$، $z_D=4-3i$ على الترتيب.

أ- أحسب AC و AD وقيساً للزاوية $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

ب- أحسب z_F لاحقة النقطة F مرجح الجملة $\{(A;1),(C;-1),(D;1)\}$ ، ما طبيعة الرباعي $ACDF$.

ج- أكتب العدد $-3+3i$ على الشكل المثلثي ، ثمّ أحسب $(-3+3i)^{2019}$.

3) من أجل كلّ نقطة M تختلف عن A لاحقتها z نرفق النقطة M' لاحقتها z' حيث :

$$z'=\frac{-iz+4i-3}{z-1}$$

أ- تحقق أن : $z'+i=\dfrac{-3+3i}{z-1}$.

ب- بيّن أن : $AM\times BM'=3\sqrt{2}$ و $\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{BM'}\right)=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

4) أ- النقطة D هي صورة النقطة E بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته -3 ، عين z_E لاحقة النقطة E .

ب- عين مركز وزاوية الدوران $\mathcal{R}$ الذي يحول E إلى B ويحوّل D إلى C .

ج- ما طبيعة التحويل $\mathcal{R}\circ h$؟ حدّد عناصره المميزة.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

I. نعتبر من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المتتالية (U_n) حيث :
$$\begin{cases} U_1 = e^2 \\ U_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{U_n} \end{cases}$$

1) أحسب U_2 و U_3 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $U_n > \frac{1}{e}$.

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ ، ثم استنتج تقارب المتتالية (U_n) .

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :
$$v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} lnU_n$$

1) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_1 .

2) عبّر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج أن : $U_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

3) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4) أحسب الجداء $P_n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$.

التمرين الرابع : (7 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - lnx^2) + 1 \quad ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (وحدة الطول $2cm$).

I. 1- أحسب نهاية f عند $+\infty$.

2- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا .

3- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث : $\alpha \geq 0$ و $f(\alpha) = 0$ ، ثم تحقق أن : $4.6 < \alpha < 4.7$.

5- أكتب معادلة للمستقيم (D) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II. g دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1- أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g' واستنتج إشارتها على المجال $[0; +\infty[$.

2- حدد إتجاه تغير الدالة g ، ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

3- أنشئ (D) و (C_f) .

III. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 lnx \, dx$

1- أحسب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة.

2- استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمماس (D) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = \frac{1}{n}$ و $x = 1$.

3- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A(n)$.