

3

رياضيات

المدة: ساعتان
التاريخ: 2018/12/03

ثانوية أول نوفمبر 1954

الرياضيات

الاختبار الأول في مادة

التوقيت (30 دقيقة)

التمرين الأول:

05
نقاطملاحظة : كل إجابة دون تبرير لا تأخذ بعين الاعتبار

أجب بصحيح أو خطأ في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير

(1) من أجل كل عدد طبيعي n : 3 يقسم $2^{2n} - 1$

(2) باقي قسمة العدد 2018^{1439} على 7 هو 2

(3) في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون $\overline{3421}^7 + \overline{1562}^7 = \overline{5413}^7$

(4) المعادلة : $21x + 14y = 40$ لا تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2

(5) في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة : $x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$ حلونها تحقق $x \equiv 4[9]$ أو $x \equiv 6[9]$

التوقيت (30 دقيقة)

التمرين الثاني

06
نقاطالمستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{2}}$ و ليكن (C_f) منحنيتها البياني (في الوثيقة المرفقة).

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$

(2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على N بـ : $u_0 = 3$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ. مثل (على الوثيقة المرفقة) الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n) على محور الفواصل دون حساب الحدود .ب. أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .ج. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.د. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة على N ثم استنتج أنها متقاربة معينا نهايتها

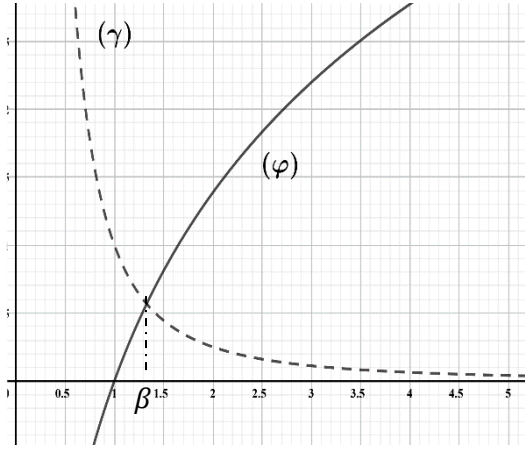
(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N بـ : $v_n = u_n^2 - 1$ ،

أ/ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، أحسب حدها الأول .ب/ أكتب v_n بدلالة n و u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ من جديد

(4) أحسب بدلالة n كلا من المجموع الآتية : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$

$L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \dots + \ln(v_n)$

$T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \dots + 2^n v_n$



جزء الأول:

- (φ) و (γ) التمثيلان البيانيان للدالتين $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ و $x \mapsto 2\ln x$ على الترتيب في المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ كما في الشكل المقابل:
 β هي فاصلة نقطة تقاطع (φ) و (γ): حيث: $1.32 < \beta < 1.33$
 g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{1}{x^2} - 2\ln x$
 أ) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (φ) على $]0; +\infty[$ ،
 ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

جزء الثاني:

- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 - x + \frac{2}{x}(1 + \ln x)$
 نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 1) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
 2) أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(\frac{1}{x})}{x^2}$.
 ب/ عين دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{\beta h + 1}{\beta}) - f(\frac{1}{\beta})}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.
 ج/ تأكد أنّ الدالة f متزايدة على المجال $]0; \frac{1}{\beta}]$ ومتناقصة على المجال $[\frac{1}{\beta}; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
 3) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
 ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
 4) أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي (Δ) ، يطلب كتابة معادلته.

- ب/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $0.3 < x_1 < 0.4$ و $2.5 < x_2 < 2.6$.
 ج/ أنشئ المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\frac{1}{\beta}) \approx 2.15$)
 5) m عدد حقيقي، h'_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال: $]0; +\infty[$ بـ:

$$h'_m(x) = (1 - m)x + 2\ln x + (\ln x)^2$$

أ/ أحسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m

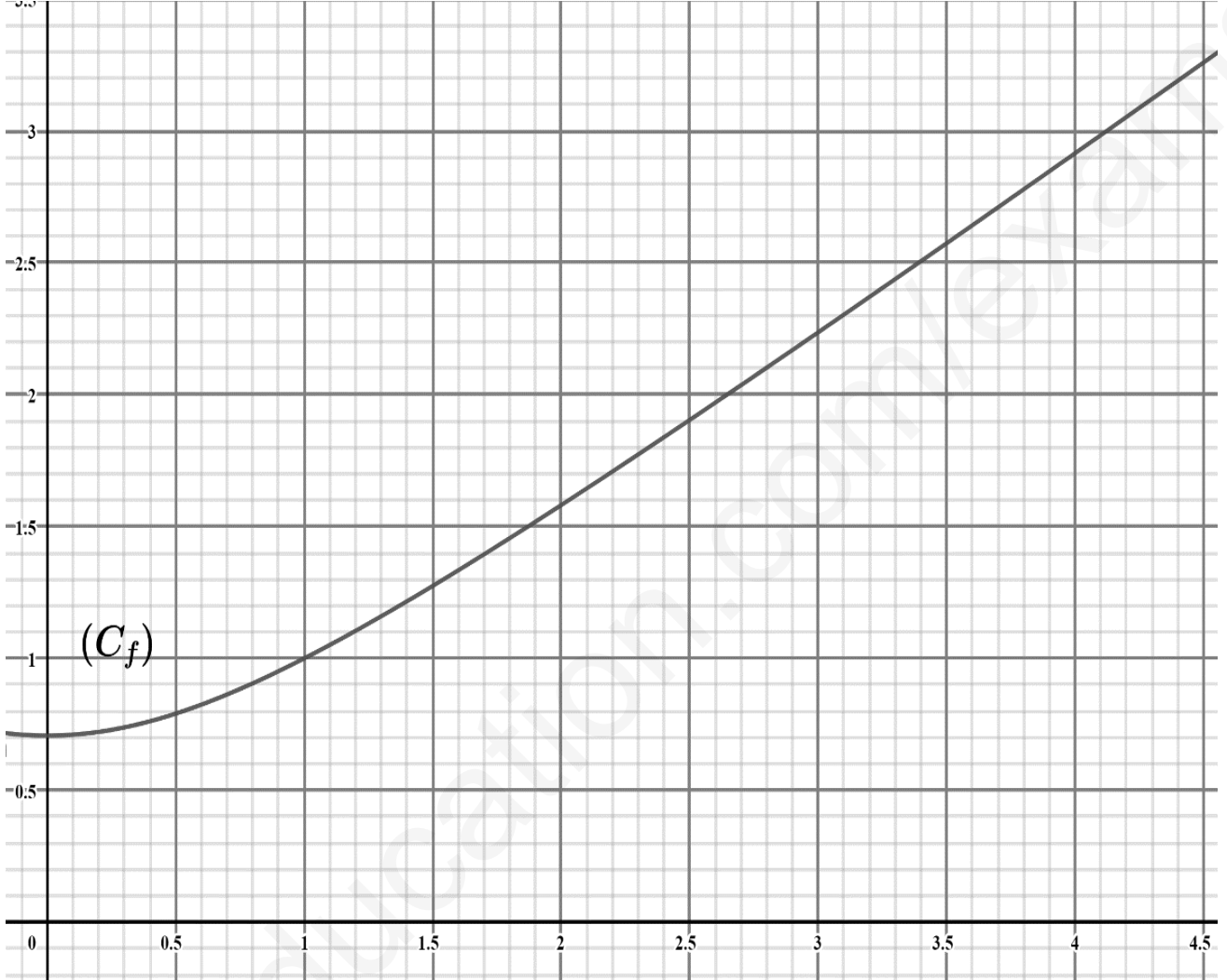
ب/ باستعمال المنحنى (C_f) ، ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $h'_m(x) = 0$

..... انتهى

ملاحظة : تعاد الوثيقة مع ورقة الإجابة ولو كانت فارغة

القسم :

الإسم واللقب :



الأستاذ: تونسي ن يمني لكم التوفيق والنجاح



التمرين الاول:

$$(1) \text{ صحيح، التبرير: } 2^2 \equiv 1[3] \text{ أي } 2^{2n} \equiv 1[3] \text{ ومنه } 2^{2n} - 1 \equiv 0[3]$$

$$(2) \text{ خطأ، التبرير: } 2018^{1439} \equiv 2^{1439}[7] \text{ أي } 2018^{1439} \equiv 4[7] \text{ وذلك بعد دراسة يواقي فسمه } 2^n \text{ على } 7$$

$$(3) \text{ خطأ، التبرير: } 5413^7 = 1921 \text{ و } 3421^7 + 1562^7 = 1240 + 632 = 1872$$

$$(4) \text{ خطأ، التبرير: } PGCD(21; 14) = 7 \text{ و } 7 \text{ لا يقسم } 40$$

$$(5) \text{ صحيح، التبرير: جدول يبين باقي قسمة العدد } x^2 - x + 6 \text{ حسب قيم العدد الصحيح } x$$

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
$x^2 \equiv$	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]
$-x \equiv$	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	[9]
$x^2 - x + 6 \equiv$	6	8	8	3	0	8	0	3	8	[9]

من الجدول نجد أنّ: $x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$ يكافئ $x \equiv 4[9]$ أو $x \equiv 6[9]$

$$(1) \text{ التمرين الثاني: } f'(x) = \frac{12}{(x+3)^2} > 0 \text{ / أو } f \text{ متزايدة على }]0; +\infty[$$

(2) / أو تمثيل الحدود

ب / التخمين: (u_n) متناقصة لأنّ $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ ، ومتقاربة نحو 1

ج / البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$ (p_n)

التحقق: (p_0) محققة لأنّ $u_0 = 3 > 1$

نفرض صحة (p_n) أي $u_n > 1$ ونبرهن أنّ (p_{n+1}) صحيحة أي $u_{n+1} > 1$

لدينا : $u_n > 1$ أي $f(u_n) > f(3)$ " f متزايدة على $]0; +\infty[$ "

ومنّه $u_{n+1} > 3$ أي (p_{n+1}) صحيحة ومنّه الخاصية (p_n) صحيحة

$$د / لدينا : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n = \frac{(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n)(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n)}{\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n} = \frac{(1-u_n^2)}{2\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{2\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n}$$$

بما ان $u_n > 1$ فإنّ $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنّه متناقصة ومنّه متناقص على \mathbb{N} ، (u_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل ($u_n > 1$) فهي متقاربة

$$ولكن نهايتها l : $lim u_{n+1} = lim \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$ يعني أنّ $l = \sqrt{\frac{1+l^2}{2}}$ يكافئ $l^2 = 1$ ومنّه $l = 1$$$

(3) / البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0

$$لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1+u_n^2}{2} - 1 = \frac{u_n^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} v_n$ ومنّه $v_n = \frac{1}{2} v_0$ وحدها الاول $v_0 = 8$$$

$$ب / كتابة v_n و u_n بدلالة n لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-3}}$ ولدينا $v_n = u_n^2 - 1$$$

$$\text{أي } u_n = \sqrt{v_n + 1} \text{ ومنّه } u_n = \sqrt{\frac{1}{2^{n-3}} + 1} \text{ ، حساب النهاية: } \lim u_n = 1$$

(4) المجموع: لدينا $v_n = u_n^2 - 1$ أي $u_n^2 = 1 + v_n$ ومنّه $S_n = (1 + v_0) + (1 + v_1) + \dots + (1 + v_n)$

$$S_n = (n+1) + v_n \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = (n+1) + 16 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

حساب المجموع T_n : لدينا $v_n = \frac{1}{2^{n-3}}$ ومنّه $w_n = 2^n v_n = 2^3 = 8$ أي (w_n) متتالية ثابتة

$$T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \dots + 2^nv_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n = 8(n+1)$$

حساب المجموع L_n : لدينا $v_n = \frac{1}{2^{n-3}}$ ومنّه $k_n = \ln(v_n) = (3-n)\ln 2$ أي (k_n) حسابية أساسها $\ln 2$

$$L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \dots + \ln(v_n) = k_0 + k_1 + \dots + k_n$$

$$L_n = \frac{n+1}{2}(k_0 + k_1) = \frac{n+1}{2}(3\ln 2 + (3-n)\ln 2) = \frac{(n+1)(6-n)\ln 2}{2}$$

التمرين الثالث: الجزء الأول: تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (φ) على $]0; +\infty[$:

على المجال $]0; \beta[$ (φ) تحت (γ) ، وعلى المجال $[\beta; +\infty[$ (φ) فوق (γ)

- إشارة $g(x)$

x	0	β	$+\infty$
$g(x)$		0	-

0.5

الجزء الثاني: / حساب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

/ *أثبت انه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{-g(\frac{1}{x})}{x^2}$ الدالة f قابلة الاشتقاق على D_f و دالتها المشتقة f' حيث

0.5

$$f'(x) = -1 + \left[\frac{-2}{x^2}(1 + \ln x) + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} \right] = -\frac{(x^2 + 2 \ln x)}{x^2} = \frac{-g(\frac{1}{x})}{x^2}$$

0.5

ب/ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{\beta h + 1}{\beta}) - f(\frac{1}{\beta})}{h} = f'(\frac{1}{\beta}) = \frac{-g(\frac{1}{\beta})}{(\frac{1}{\beta})^2} = 0$ ب/ (C_f) يقبل مماسا عند $\frac{1}{\beta}$ يوازي حامل محور الفواصل

x	0	$\frac{1}{\beta}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	-

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f : من أجل كل x من D_f

لدينا: إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(\frac{1}{x})$ وهي:

0.5

الدالة f متزايدة على المجال $]0; \frac{1}{\beta}]$ ومتناقصة على المجال $[\frac{1}{\beta}; +\infty[$

* جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$1/\beta$	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(1/\beta)$	$-\infty$

(ب) نبين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته $y = -x + 1$ عند $+\infty$:

0.5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x}(1 + \ln x) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right] = 0$$

(ج) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة ل (Δ) :

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$1 + \ln x$		0	+

لدينا $[f(x) - (-x + 1)] = \frac{2}{x}(1 + \ln x)$ و منه إشارة الفرق هي من إشارة $(1 + \ln x)$ وهي:

0.5

إذن: (C_f) يقع فوق (Δ) على $[\frac{1}{e}; +\infty[$ وتحت (Δ) على المجال $]0; \frac{1}{e}]$ و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيات $(\frac{1}{e}; \frac{-1+e}{e})$.

0.75

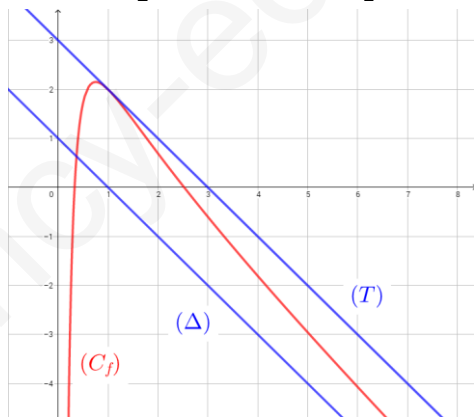
/ * نبين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) : نحل المعادلة $f'(x) = -1$ معناه $\frac{-g(\frac{1}{x})}{x^2} = -1$ معناه $x^2 + 2 \ln x = x^2$

ومنه $\ln x = 0$ ومنه $x = 1$ إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ معادلته $y = -x + 3$

01.5

ب/ " باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث $0.3 < x_1 < 0.4$ و $2.5 < x_2 < 2.6$.

ج/ التمثيل البياني:



01

$$h'_m(x) = 1 - m + \frac{2}{x} + \frac{2 \ln x}{x} \quad / \text{أ} (5)$$

ب/ المناقشة البيانية المعادلة $h'_m(x) = 0$

0.25

تكافئ $m = f(x) + x$ أي أن $m = 1 + \frac{2}{x}(1 + \ln x)$ ومنه

$f(x) = -x + m$ حلولها هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات

ذات المعادلة $y = -x + m$: الموازية ل (T) و (Δ) ومنه نجد:

0.5

✓ إذا $m \leq 1$ فإن للمعادلة حل وحيد

✓ إذا $1 < m < 3$ فإن للمعادلة حلان

✓ إذا $m = 3$ فإن للمعادلة حل وحيد

إذا $m > 3$ فإن المعادلة ليس لها حل

الأستاذ: تونسي ن يمتنى لكم التوفيق والنجاح