اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (5 نقاط):

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة أساسها q و حدها الأول u_0 حيث :

$$\begin{cases} \ln(u_2) - \ln(u_4) = 4 \\ \ln(u_1) + \ln(u_5) = -12 \end{cases}$$

1) عين الأساس q و الحد الأول u_0 ثم أكتب عبارة u_n بدلالة n.

2) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = 1 + eu_1 + e^2u_2 + ...+ e^n u_n$

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها.

ب- احسب المجموع T_n و حيث: $T_n = v_0 + v_1 + v_2 + ...+ v_n$

ج- عين قيمة n حتى يكون $T_n{}^2 = 2^{30}$.

التمرين الثاني(6 نقاط):

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهولين (x, y) حيث: $4x - 9y = 5$.

1) تحقق أن الثنائية $(-10, -5)$ حل للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

2) A عدد طبيعي حيث $A = \overline{43}$ في نظام العد ذي الأساس x و $A = \overline{98}$ في نظام العد ذي الأساس y حيث: $x \le 35$ و $y \le 15$

- عين القيم المكنة لـ x و y ثم أكتب A في النظام العشري

3) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ 4^n على 9.

ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية لـ $2971 + 1442^{6n+2} - 2020^{2021}$ على 9.

ج- عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) حيث: $2020^x + 4^y + 7 \equiv 0[9]$

التمرين الثالث(9 نقاط): نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right) & ; \ x\neq 0\\ 1 & ; \ x=0\end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أدرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0.

ب- أحسب: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$، ماذا تستنتج؟

جـ- أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) أ- أحسب $f'(x)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) نضع: $h(x)=f(x)-x$. بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,65\prec\alpha\prec 0,7$.

4) أحسب $f(-x)+f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

5) أ- أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T). ماذا تستنتج؟

6) أنشئ (T) و (C_f).

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة: $f(x)=-\frac{1}{2}x+e^m-1$

8) (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $U_0=0$ من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $|U_n-\alpha|\leq\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

جـ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$، ماذا تستنتج؟

أستاذتكم تتمنى لكم كل التوفيق و النجاح – بن صافية-

الإجابة النموذجية لاختبار الفصل الأول

التمرين الأول:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة أساسها q و حدها الأول u_0 حيث :

$$(1)............\begin{cases}\ln(u_2)-\ln(u_4)=4\\ \ln(u_1)+\ln(u_5)=-12\end{cases}$$

1) تعيين الأساس q و الحد الأول u_0 :

لدينا: (1) تكافيء: $\begin{cases}\dfrac{u_2}{u_4}=e^2\\ u_1\times u_5=e^{-12}\end{cases}$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة أساسها q

فإن: $u_2=u_0\times q^2$ ، $u_4=u_0\times q^4$ ، $u_1=u_0\times q^1$ و $u_5=u_0\times q^5$ بالتعويض نجد:

$\begin{cases}\dfrac{u_0\times q^2}{u_0\times q^4}=e^4\\ u_0\times q^1\times u_0\times q^5=e^{-12}\end{cases}$ منه: $u_0=1$ و $q=e^{-2}$

عبارة u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n=u_0\times q^n$ منه: $u_n=e^{-2n}$.

2) حساب المجموع S_n :

$$S_n=1+eu_1+e^2u_2+.............+e^nu_n$$

نضع: $y_n=e^nu_n=e^{-n}$ المتتالية (y_n) متتالية هندسية أساسها e^{-1} و حدها الأول $y_0=1$

$$S_n=y_0+y_1+y_2+.............+y_n$$

منه:

$$=\left(\frac{1-e^{-n+1}}{1-e^{-1}}\right)$$

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية حسابية: لدينا:

$$v_{n+1}-v_n=\ln u_{n+1}+\ln u_{n+2}-\ln u_n-\ln u_{n+1}$$

$$=\ln\left(\frac{u_{n+2}}{u_n}\right)=\ln\left(\frac{e^{-2(n+2)}}{e^{-2n}}\right)$$

$$=\ln\left(e^{-2n-4+2n}\right)=-4$$

منه (v_n) متتالية حسابية أساسها (4-)

ب- حساب المجموع T_n :

$$T_n=v_0+v_1+v_2+...............+v_n$$

$$=\frac{n+1}{2}(v_0+v_n)$$

$$=\frac{n+1}{2}(-2-4n-2)$$

$$=(n+1)(-2-2n)$$

ج- تعيين قيمة n حتى يكون $T_n^{\ 2}=2^{30}$:

لدينا $(T_n)^2=((n+1)(-2-2n))^2$ منه:

$$((n+1)(-2-2n))^2=2^{30}$$

$$\left(-2(n+1)^2\right)^2=2^{30}$$

$$2^2(n+1)^4=2^{30}$$

$$(n+1)^4=2^{28}$$

$$(n+1)=2^7$$

$$n=127$$

التمرين الثاني:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهولين (x,y) حيث: $4x-9y=5$.

1) التحقق أن الثنائية $(-10,-5)$ حل للمعادلة (E) و حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E):

لدينا: $4(-10)-9(-5)=5$ منه: الثنائية $(-10,-5)$ حل للمعادلة (E).

الحل: $\begin{cases}4x-9y=5\\ 4(10)-9(5)=-5\end{cases}$ بالجمع نجد:

$$4(x-10)=9(y+5)$$

حسب غوص 4 يقسم $(y+5)$ أي:

$y=4k-5\quad ....k\in\mathbb{Z}$.

بالتعويض نجد: $x=9k-10\quad ....k\in\mathbb{Z}$.

2) A عدد طبيعي حيث $A=\overline{43}$ في نظام العد ذي الأساس x و $A=\overline{98}$ في نظام العد ذي الأساس y حيث: $x\le 35$ و $y\le 15$

القيم الممكنة لـ x و y وكتابة A في النظام العشري

k	2	3	4	5
x	8	17	26	35
y	3	7	11	15
A	35	71	107	143

3) أ- دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ 4^n على 9.

k	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
البواقي	1	4	7

بـ- باقي القسمة الإقليدية لـ $2020^{2021}-1442^{6n+2}+2971$ على 9:

لدينا: $2020\equiv 4[9]$ و $2021=3\times673+2$ منه: $2020^{2021}\equiv 4^{3\times673+2}[9]$ أي: $2020^{2021}\equiv 7[9]$

و لدينا: $1442\equiv 2[9]$ و $1442^{6n+2}=\left(1442^2\right)^{3n+1}$

منه: $1442^{6n+2}\equiv 4[9]$

لدينا: $2971\equiv 1[9]$ منه:

$2020^{2021}-1442^{6n+2}+2970\equiv(7-4+1)[9]$

أي: $2020^{2021}-1442^{6n+2}+2970\equiv 4[9]$

جـ- تعيين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) حيث: $2020^x+4^y+7\equiv 0[9]$:

$2020^x=2020^{9k-10}=2020^{3(3k-4)+2}\equiv 7[9]$

و $7\equiv 7[9]$ منه:

$2020^x+4^y+7\equiv(14+4^y)[9]$ اذن:

$4^y\equiv 4[9]$

أي: $y=3k'+1$ منه: $4k-5=3k'+1$ منه:

$4k=3k'+6=3(k'+2)$

حسب غوص 3 يقسم k أي:

$(x,y)=(9k-10;4k-5)$ مع: $k=3k'$ و $k'\in\mathbb{N}^*$.

التمرين الرابع:

1) أ- تبيان أن الدالة f مستمرة عند 0: $\lim_{x\to0} f(x)=1=f(0)$. ومنه: f مستمرة عند 0.

1) بـ- دراسة قابلية اشتقاق f عند 0: $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}=f'(0)$

ومنه: f قابلة للاشتقاق عند 0.

---

2) أ- حساب الدالة المشتقة:

f معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$

2) بـ- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $|f'(x)|\le\frac{1}{2}$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x^2\ge 0$ ومنه: $\sqrt{1+x^2}\ge 1$ و $1+\sqrt{1+x^2}\ge 2$.

أي: $\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\ge 2$ أي: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\le\frac{1}{2}$.

أي: $\left|\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\right|\le\frac{1}{2}$ ومنه: $|f'(x)|\le\frac{1}{2}$.

2) جـ- جدول تغيرات الدالة f:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \; ; \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) < 0$ ومنه: f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0

3) تبيان أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}65 < \alpha < 0{,}7$:

نضع: $h(x) = f(x) - x$. دالتها المشتقة $h'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h'(x) = f'(x) - 1$.

لدينا من 2) بـ- : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ أي: $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ أي: $-\frac{3}{2} \leq f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2}$

أي: $-\frac{3}{2} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{2}$ ومنه: $h'(x) < 0$. (h متناقصة تماما على $\mathbb{R}$)

مبرهنة القيم المتوسطة: الدالة h مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0{,}65 \,; 0{,}7[$ و $h(0{,}65) \times h(0{,}7) = 0{,}053 \times (-0{,}015) < 0$.

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ $(f(x) = x)$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}65 < \alpha < 0{,}7$ مع: $f(\alpha) = \alpha$.

4) أ- حساب $f(-x) + f(x)$:

من أجل x من $\mathbb{R}$ و $(-x)$ من $\mathbb{R}$: $f(-x) + f(x) = 2$.

التفسير الهندسي: النقطة $\omega(0\,;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة f.

4) بـ- معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 0:

$$(T) : y = -\frac{1}{2}x + 1$$

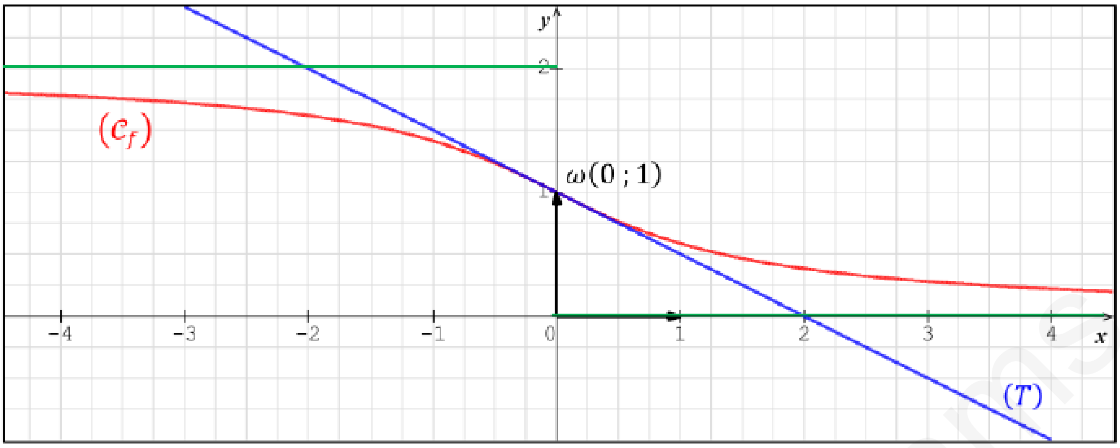
4) جـ- دراسة وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المماس (T):

$$f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{x^3}{2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)^2}$$

الوضعية:

- $x < 0$: $(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت (أسفل) (T).
- $x = 0$: $(\mathcal{C}_f)$ يقطع (يخترق) (T) في النقطة $\omega(0\,;1)$.
- $x > 0$: $(\mathcal{C}_f)$ يقع فوق (أعلى) (T).

5) إنشاء (T) و $(\mathcal{C}_f)$:



6) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$، وعليه:

$$|f(u_n)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

$$|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \ ; \ f(\alpha)=\alpha$$

6) ب- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $|u_n-\alpha| \leq \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$:

$$|u_1-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_0-\alpha|$$

$$|u_2-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_1-\alpha|$$

$$\dots$$

$$|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1}-\alpha|$$

$$|u_n-\alpha| \leq \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

6) جـ- تبيان أن المتتالية (u_n) متقاربة وحساب نهايتها:

متتالية متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$ (باستعمال النهايات بالمقارنة).

مناقشة عدد و اشارة حلول المعادلة: $f(x)=-\frac{1}{2}x+e^m-1$:

حلول المعادلة $f(x)=-\frac{1}{2}x+e^m-1$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+e^m-1$

مناقشة مائلة بالتوازي مع (T)

e^m-1	-1	1	$+\infty$
عدد و اشارة الحلول	حل وحيد سالب	حل وحيد معدوم	حل وحيد موجب
m	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
عدد و اشارة الحلول	حل وحيد سالب	حل وحيد معدوم	حل وحيد موجب