التمرين الاول :(04 نقاط)

I. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 0$ و من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2u_n + 1$

1. أ) احسب u_1 ، u_2 و u_3

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n = 2^n - 1$

2. (v_n) و (w_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين على $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 3$ و $w_n = 2^n$

أ) بين أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q

ب) احسب بدلالة n ، S_n و S'_n و S''_n

حيث : $S_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$ ، $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $S''_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

II. نعتبر في هذا الجزء انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ فان جميع حدود المتتاليتين (u_n) و (v_n) من $\mathbb{N}$

1. عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للحدين u_n و v_n

2. أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 3

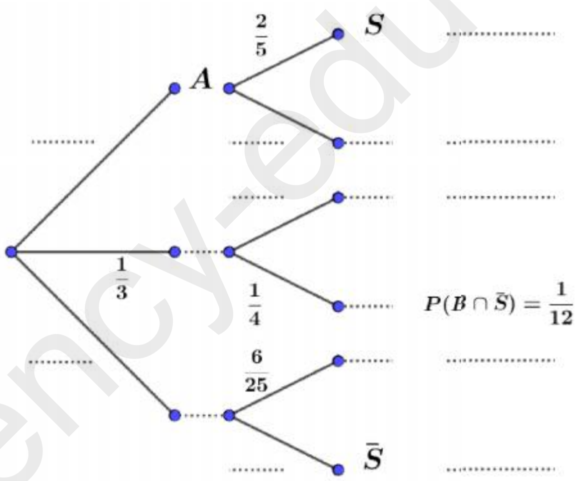
ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $v_n \equiv 0[3]$

ج) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل الحدين u_n و v_n أوليين فيما بينهما

3. بين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ فان $S''_n \equiv S'_n[3]$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يعرض متجر تخفيضات هامة أثناء بيع جزء من مدخراته لقطع الغيار التي تشتمل ثلاثة أنواع من السلع x ، y ، z، تمثل السلعة x ربع المدخرات بينما تمثل y ثلثها و تمثل z الباقي ، 40% من السلعة x و 75% من السلعة y و 24% من السلعة z كلها مخفضة الثمن . أخذ زبون قطعة عشوائيا.



لتكن الاحداث التالية:

A : " الحادثة اخذ الزبون القطعة من السلعة x "

B : " الحادثة اخذ الزبون القطعة من السلعة y "

C : " الحادثة اخذ الزبون القطعة من السلعة z "

S : " الحادثة القطعة التي أخذها الزبون مخفضة الثمن"

$\bar{S}$: " الحادثة القطعة التي أخذها الزبون غير مخفضة الثمن"

1. انقل الشجرة المقابلة على ورقة الإجابة , ثم أكملها .

2. احسب $P(S)$ احتمال أن تحقق الحادثة S

3. احسب $P(\bar{S})$ احتمال أن تحقق الحادثة $\bar{S}$

التمرين الثالث :(05 نقاط)

I. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z + 2 - 3i)(z^2 - 2z + 10)$

II. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A، B، C التي لاحقاتها z_A، z_B، z_C على الترتيب، حيث: $z_A=-2+3i$ ، $z_B=1-3i$ ، $z_C=\overline{z_B}$.

1. أ) اكتب على الشكل الجبري، ثم على الشكل الاسي العدد المركب $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$

ب) اوجد طبيعة التحويل النقطي T الذي يحول النقطة A الى النقطة B مع تحديد عناصره المميزة.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC

د) بين ان النقاط A، B، C تقع على دائرة (d)، يطلب تحديد مركزها t ونصف قطرها r

2. (a) مجموعة النقط $M(x;y)$ ذات اللاحقة $z=x+iy$ التي تحقق $\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right|=1$

أ) عين ثم انشئ المجموعة (a).

ب) عين ثم انشئ صورة المجموعة (a) بالتحويل النقطي T.

3. أ) عين z_D لاحقة النقطة D، بحيث تكون النقطة C مرجح للجملة $\{(A;1),(B;1),(D;-1)\}$

ب) بين ان النقطة D هي نظيرة النقطة C بالنسبة الى النقطة t .

ج) عين بدقة طبيعة الرباعي $ADCB$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجموعة $]-\infty;0[\cup]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{2}-\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

(C_f): التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، $\|\vec{i}\|=1cm$

I.

1. احسب نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة تعريفها.

2. أ) اثبت أن المستقيم $(\mathscr{D})$ ذو المعادلة $y=\dfrac{x}{2}$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$

ب) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و $(\mathscr{D})$.

3. أ) بين انه من اجل كل x من المجموعة $]-\infty;0[\cup]-1;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{x^2-x-2}{2x(x-1)}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجموعة $]-\infty;0[\cup]-1;+\infty[$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4. أنشئ (C_f) و المستقيمات المقاربة في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

II.

1. λ عدد حقيقي، بين ان الدالة $x\mapsto(x-\lambda)\ln(x-\lambda)-x$ دالة اصلية للدالة $\ln(x-\lambda)$ على المجال $]0;+\infty[$

2. α عدد حقيقي حيث $\alpha>2$، احسب بـ cm^2 المساحة $\mathscr{A}(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بـ (C_f)، $(\mathscr{D})$ و المستقيمين ذي المعادلتين $x=2$ ، $x=\alpha$

3. احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathscr{A}(\alpha)$

بالتـــوفيـــق

تصحيح

التمرين الاول

I.

1.

أ) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 :

$u_1 = 1$ ، $u_2 = 3$ ، $u_3 = 7$

ب) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^n - 1$:

نبرهن بالتراجع على الخاصية $P(n)$ ($P(n)$: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^n - 1$)

المرحلة الأولى : من اجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ الخاصية $P(0)$ صحيحة

المرحلة الثانية :ليكن k عدد طبيعي كيفي

لنفترض أن الخاصية $P(k)$ صحيحة أي أن $u_k = 2^k - 1$ ، ونبرهن صحة الخاصية $P(k+1)$

لدينا : $u_{k+1} = 2u_k + 1$ ومنه: $u_{k+1} = 2\left(2^k - 1\right) + 1$ ومنه : $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$

وبالتالي فان الخاصية $P(k+1)$ صحيحة

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فان $u_n = 2^n - 1$

2.

أ) تبيين أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q :

لدينا : $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2$

ومنه المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$

ب) حساب بدلالة n ، S_n ، S'_n و S''_n :

$S_n = 2^{n+1} - 1$ ، $S'_n = 2^{n+1} + 2n + 1$ ، $S''_n = 2^{n+1} - (n+2)$

II.

1. تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للحدين u_n و v_n :

ليكن $p\gcd(u_n ; v_n) = d$ ومنه: d / u_n و d / v_n ومنه : $d / v_n - u_n$ ومنه : $d / 3$

وبالتالي القيم الممكنة لـ : $d \in D_3 = \{1 ; 3\}$

2.

أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 3:

n	$2k$	$2k+1$
بواقي قسمة 2^n على 3	1	2

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $v_n \equiv 0[3]$:

لدينا : $v_n \equiv 0[3]$ معناه أن : $2^n \equiv -2[3]$ وبما أن: $-2 \equiv 1[3]$ إذن : $2^n \equiv 1[3]$

وبالتالي نجد : $n = 2k$ ؛ $k \in$

ج) استنتاج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل $p\gcd(u_n ; v_n) = 1$:

نعلم أن $v_n \equiv 0[3]$ لما $n = 2k$ ؛ $k \in$ وكذلك نجد أن : $u_n \equiv 0[3]$ لما $n = 2k'$ ؛ $k' \in$

أي في هذه الحالة نجد : $p\gcd(u_n ; v_n) = 3$ لكن القيم الممكنة لـ d هي : 3 او 1 إذن حتى

يكون $p\gcd(u_n ; v_n) = 1$ يجب أن يكون $n = 2m + 1$ ؛ $m \in$

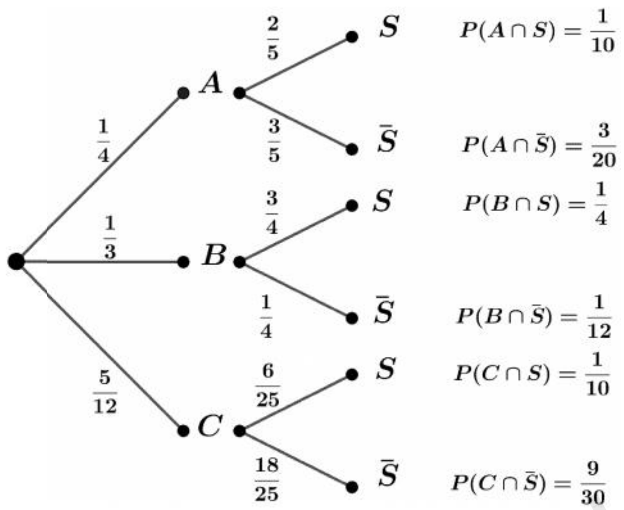
3. تبيين انه من اجل كل n من فان $S''_n \equiv S'[3]$:

لدينا : $S''_n - S' = 3(n+1)$ تكافئ أن: $S''_n - S' = 0[3]$ تكافئ أن: $S''_n \equiv S'[3]$

الاحتمالات

التمرين الثاني

1. اكمال شجرة الاحتمالات:



2. حساب $P(S)$ احتمال تحقق الحادثة S :

$$P(S)=P(A\cap S)+P(B\cap S)+P(C\cap S)=\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=\frac{9}{20}$$

3. حساب $P(\bar{S})$ احتمال تحقق الحادثة $\bar{S}$:

$$P(\bar{S})=P(A\cap \bar{S})+P(B\cap \bar{S})+P(C\cap \bar{S})=\frac{3}{20}+\frac{1}{12}+\frac{9}{30}=\frac{8}{15}$$

التمرين الثالث : ....

.I

حل في المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z+2-3i)(z^2-2z+10)=0$

$(z-+2-3i)(z^2-2z+10)=0$ تكافئ $z=-2+3i$ او $z^2-2z+10=0$

لنحل المعادلة $z^2-2z+10=0$:

لدينا $\Delta=-36=(6i)^2$ ومنه $z_1=\dfrac{2-6i}{2}$, $z_2=\dfrac{2+6i}{2}$

أي : $z_1=1-3i$, $z_2=1+3i$

وبالتالي نجد :

$(z-+2-3i)(z^2-2z+10)=0$ تكافئ $z\in\{-2+3i;1-3i;1+3i\}$

.II

1. أ) كتابة الشكل الجبري ، والشكل الاسي للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$:

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1-3i-1-3i}{-2+3i-1-3i}=\frac{-6i}{-3}=2i$$

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2e^{i\frac{\text{®}}{2}}$$

ب) ايجاد طبيعة التحويل النقطي T مع ذكر عناصره المميزة:

لدينا : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2e^{i\frac{\text{®}}{2}}$ تكافئ $z_B-z_C=2e^{i\frac{\text{®}}{2}}(z_A-z_C)$

ومنه التحويل النقطي هو تشابه مباشر مركزه النقطة C ونسبته 2 وزاويته $\dfrac{\text{®}}{2}$

ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $z_B-z_C=2e^{i\frac{\text{®}}{2}}(z_A-z_C)$ معناه : $|z_B-z_C|=2|z_A-z_C|$

معناه : $CB=2CA$

لدينا : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=2e^{i\frac{\text{®}}{2}}$ معناه: $\arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\dfrac{\text{®}}{2}+k\times 2\text{®}\ ,k\in$

معناه : $(\overrightarrow{CA}\,,\overrightarrow{CB})=\dfrac{\text{®}}{2}+k\times 2\text{®}\quad ,\ k\in$

وبالتالي نجد ان المثلث ABC مثلث قائم في النقطة C

د) تبيين ان النقاط A ، B ، C تقع على دائرة (Γ) مع تحديد مركزها النقطة Ω ونصف قطرها r :

بما ان المثلث ABC قائم في النقطة C فان النقاط A ، B ، C تقع على دائرة (Γ) قطرها هو وتر للمثلث ABC أي ان القطعة $[AB]$ هي قطر للدائرة (Γ) وبالتالي فان النقطة Ω هي منتصف القطعة $[AB]$

لتكن z_Ω لاحقة النقطة Ω لدينا : $z_\Omega=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{-2+3i+1-3i}{2}=-\dfrac{1}{2}$

اذن $\Omega\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ و $r=\dfrac{|z_B-z_A|}{2}=\dfrac{|1-3i+2-3i|}{2}=\dfrac{|3-6i|}{2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}u.m$

2. ا) تعيين وانشاء المجموعة النقط (Δ):

$\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_C}\right|=1$ تكافئ $\left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1$ تكافئ $|z-z_A|=|z-z_B|$

معناه ان $AM = BM$

أي مجموعة النقط هي عبارة عن محور القطعة $[AB]$

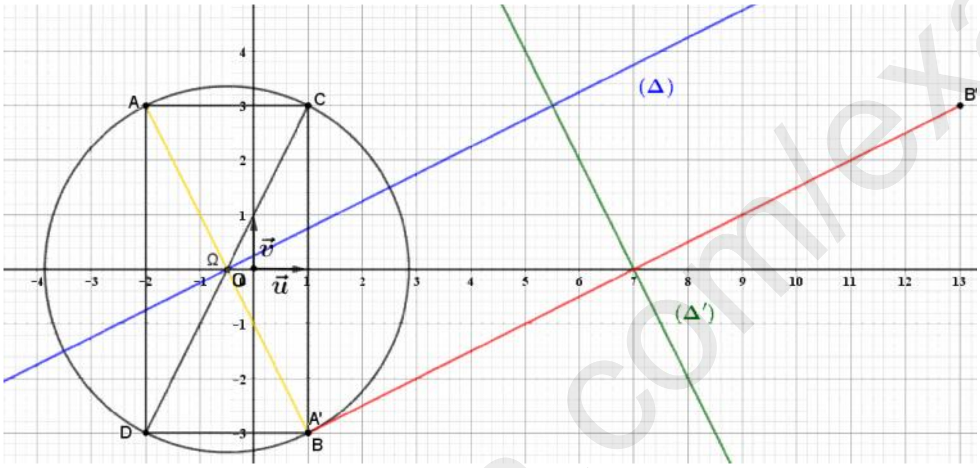
ب) تعيين وانشاء صورة المجموعة النقط (Δ) بالتحويل النقطي T:

لتكن النقط A' ، B' و M' حيث : $T(A) = A'$ ، $T(B) = B'$ و $T(M) = M'$

بما ان التحويل النقطي T هو تشابه مباشر فان : $\frac{B'M'}{BM} = \frac{A'M'}{AM}$ ومنه: $\frac{BM}{AM} = \frac{B'M'}{A'M'}$

أي : $\frac{B'M'}{A'M'} = 1$ وبالتالي نجد : $A'M' = B'M'$

اي صورة مجموعة النقط $[AB]$ عبارة عن محور القطعة $[A'B']$



3. أ) تعيين لاحقة النقطة D :

النقطة D مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(D;-1)\}$ معناه :

$z_C = \frac{z_A + z_B - z_D}{1+1-1} = z_A + z_B - z_D$ ومنه: $z_D = z_A + z_B - z_C$

أي : $z_D = -2+3i+1-3i-1-3i = -2-3i$

ب) تبيين ان النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة Ω:

النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة Ω معناه ان النقطة Ω منتصف القطعة $[CD]$

لدينا : $z_\Omega = -\frac{1}{2} = \frac{1+3i-2-3i}{2} = \frac{z_C + z_D}{2}$

اذن: النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة Ω

ج) تعيين بدقة طبيعة الرباعي $ADBC$:

بما ان القطعتيين $[AB]$ ، $[CD]$ قطرا الرباعي $ADBC$ و كذلك قطرا للدائرة (Γ) ، و النقطتيين C ، D لا تنتميان الى (Δ) محور القطعة $[AB]$ لان $|z_C - z_A| \neq |z_C - z_B|$ و $|z_D - z_A| \neq |z_D - z_B|$

فان القطران $[AB]$ ، $[CD]$ متنصفان و متقايسان و غير متعامدان اذن الرباعي $ADBC$ مستطيل.

التمرين الرابع :

I.

1. حساب نهايات الدالة عند اطراف مجموعة التعريف :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. أ) بين أن المستقيم $(\mathscr{D})$ ذو المعادلة مستقيم $y=\frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ ، $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=0 \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=0$$

ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و $(\mathscr{D})$:

لدينا من اجل كل x من $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$ ، $f(x)-\frac{1}{2}x=-\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$f(x)-\frac{1}{2}x=0$ يكافئ $-\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=0$ يكافئ $\frac{x-1}{x}=1$ معناه $x-1=x$ أي $-1=1$

و هذا تناقض ، اذن من اجل كل x من $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$ فان (C_f) لايقطع $(\mathscr{D})$

$f(x)-\frac{1}{2}x<0$ يكافئ $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)>0$ $\frac{x-1}{x}>1$ يكافئ $\frac{x-1}{x}-1>0$

يكافئ $\frac{-1}{x}>0$ يكافئ $-x>0$ يكافئ $x<0$

اذن من اجل كل x من $]-\infty\,;0[$ فان (C_f) يقع تحت $(\mathscr{D})$

$f(x)-\frac{1}{2}x>0$ يكافئ $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)<0$ يكافئ $\frac{x-1}{x}<1$ يكافئ $\frac{x-1}{x}-1<0$

يكافئ $\frac{-1}{x}<0$ يكافئ $-x<0$ يكافئ $x>0$

اذن من اجل كل x من $]1\,;+\infty[$ فان (C_f) يقع فوق $(\mathscr{D})$

اذن (C_f) يقع تحت (Δ)

3. أ) تبيين من اجل كل x من $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-2}{2x(x-1)}$:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x-\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)'=\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x(x-1)}$$
$$=\frac{x^2-x-2}{2x(x-1)}$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجموعة $]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$ ، مع تشكيل جدول تغيراتها:

تشكيل جدول اشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		x
x^2-x-2		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x(x-1)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		▨		$-$	0	$+$	

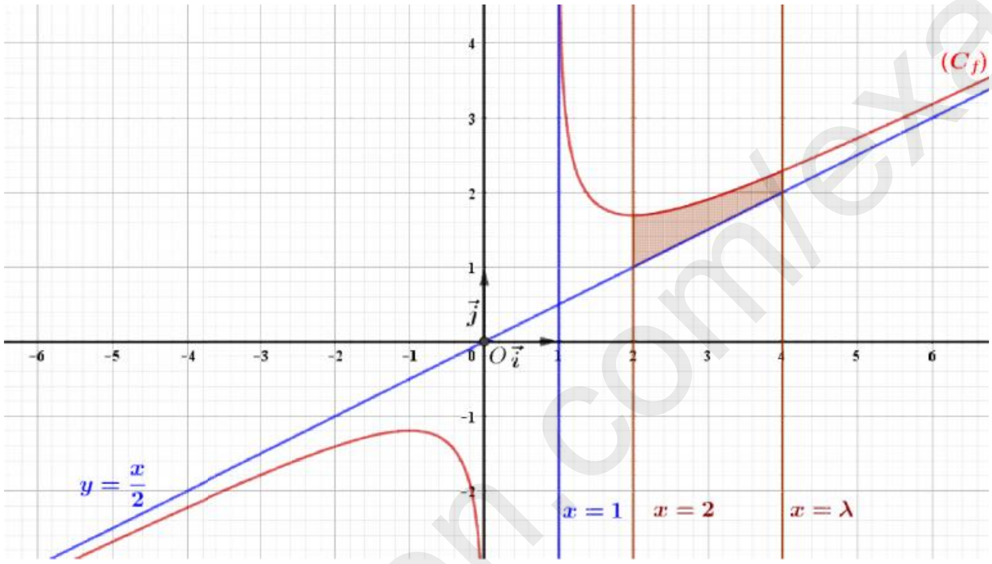
ومنه الدالة متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty\,;-1]$ و $[2\,;+\infty[$ ، و متناقصة تماما على كل من المجالين $[-1\,;0[$ و $]1\,;2]$

الـــــدوال العددية

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-1		0	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1+\ln 2$	↘	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}-\ln 2$	↗	$+\infty$

4. إنشاء (C_f) و المستقيمات المقاربة (Δ) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$:



.II

1. $a\in$ ، تبيين ان الدالة $x\mapsto(x-a)\ln(x-a)-x$ دالة الاصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-a)$ على المجال $]a\,;+\infty[$:

من اجل كل من المجال $]a\,;+\infty[$ نضع : $H(x)=(x-a)\ln(x-a)-x$ و $h(x)=\ln(x-a)$

الدالة H قابلة للاشتقاق على المجال $]a\,;+\infty[$ و

$$H'(x)=(x-a)\frac{1}{x-a}+\ln(x-a)-1=1+\ln(x-a)-1=\ln(x-a)=h(x)$$

ومنه الدالة H هي دالة اصلية للدالة h على المجال $]a\,;+\infty[$.

2. حساب $\mathcal{A}(\lambda)$:

$$A(\lambda)=1\times1\int_2^{\lambda}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx=\int_2^{\lambda}-\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)dx=\int_2^{\lambda}(\ln x-\ln(x-1))\,dx$$

$$A(\lambda)=\left[x\ln x-x-(x-1)\ln(x-1)+x\right]_2^{\lambda}=\lambda\ln\lambda-(\lambda-1)\ln(\lambda-1)-2\ln 2\,cm^2$$

3. حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\ln\lambda-(\lambda-1)\ln(\lambda-1)-2\ln 2=+\infty$$

مجموعة الرياضيــــات بالجزائـــــر