

3

رياضيات

المدة: 3 ساعات
التاريخ: 2019/03/04ثانوية أول نوفمبر 1954
الاعواط

الرياضيات

اختبار الثلاثي الثاني في مادة

التوقيت (40 دقيقة)

التمرين الأول:

04.5
نقاط

يحتوي صندوق u_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين. لا يمكن التمييز بينها باللمس نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من u_1 ولتكن الأحداث:

A " سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء " ، B " سحب ثلاث كرات من نفس اللون " ، C " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل "

(1) يبين أن: $P(A) = \frac{1}{14}$ ثم أحسب $P(B)$ و $P(C)$

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الألوان التي تحملها الكرات المسحوبة

أ/ حدّد قيم المتغير العشوائي X

ب/ حدّد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ج/ اللاعب يدفع $50DA$ قبل إجراء السحب، ويكسب $25DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها. هل اللعبة مربحة له ؟

(4) نعتبر صندوقا آخر u_2 يحتوي على كرتين بيضاوين وكرة سوداء

نضع الكرات الثلاثة المسحوبة من u_1 في الصندوق u_2 ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من u_2

* ما احتمال أن الكرتان المسحوبتان من u_2 بيضاوين علما أن الكرات الثلاثة المسحوبة من u_1 لها نفس اللون

04
نقاط

التوقيت (35 دقيقة)

التمرين الثاني

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{0}; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط $A; B; I$ التي لواحقتها على الترتيب:

$$z_I = i \text{ و } z_B = -1 + i, z_A = -2$$

من أجل كل عدد مركب $Z \neq -2$ نضع: $z' = \frac{iz+i+1}{z+2}$ حيث M صورة العدد المركب Z و M' صورة z'

$$(1) - \text{ أ/ تحقق من أن: } z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$$

- ب/ يبين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (C) يطلب تعيين عناصرها

- ج/ عين طبيعة (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون Z' تخيليا صرفا

$$(2) - \text{ أ/ تحقق من أن: } z' - i = \frac{1-i}{z+2}$$

- ب/ استنتج أن: $IM' \times AM = \sqrt{2}$ وأن: $\frac{-\pi}{4} [2\pi] \equiv (\vec{u}, \overline{IM'}) + (\vec{u}, \overline{AM})$

- ج/ يبين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1

فإن النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تعيينها

إقلب الصفحة

05.5
نقاط

1/ نعتبر كثير الحدود $p(z)$ للمتغير المركب z حيث : $p(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$
 1/ أحسب $p(2)$ ثم عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $p(z) = (z - 2)(z^2 + az + b)$

2/ حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $p(z) = 0$ ، ثم أكتب حلولها على الشكل الأسّي

II) المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{0}; \vec{u}; \vec{v})$ (وحدة الطول 5cm)

ليكن S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z' = \frac{1+i}{2}Z$

(1) يبين أنّ S تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة

(2) نسمي A_0 النقطة التي للاحقتها $Z_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_{n+1} = S(A_n)$ ،

مع النقطة A_n صورة العدد المركب Z_n

أ/ أحسب Z_1, Z_2, Z_3, Z_3 ثم علمّ النقط : A_1, A_2, A_3, A_4

ب/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = OA_n$ ، أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

** تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n أنّ : $u_n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

** ابتداءً من أيّ رتبة n_0 تنتهي كلّ النقط A_n إلى القرص الذي مركزه O ونصف قطره 0.1

** نرمزب T_n إلى مجموع أطوال القطع المستقيمة $[A_0O], [A_1O], \dots, [A_nO], [A_{n+1}O]$

أحسب المجموع T_n بدلالة n ثم أحسب نهاية T_n

3) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n أنّ : $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OA_nA_{n+1}

06
نقاط

لتكن الدالة f المعرفة على \mathcal{R} بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

حيث a, b, c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

1- عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماساً معامل توجيهه 3 والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة

$$f(x) = 0$$

$$2- \text{ نضع } a = 1, b = 0, c = -3$$

أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3- عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل . ثم أرسم (C_f) .

4- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من \mathcal{R} فإن $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على \mathcal{R} .

5- أحسب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما

$$x = 1 \text{ و } x = 3$$

6- m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح.... أستاذ المادة: تونسي ن



تصحيح الاختبار الثاني في مادة

التمرين الأول:

$$(1) \text{ تبين أن: } P(A) = \frac{1}{14}, \text{ لدينا } p(A) = \frac{c_3^2 \times c_2^1}{c_9^3} = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}$$

$$p(B) = \frac{c_4^3 + c_3^3}{c_9^3} = \frac{5}{84} \approx 0.06.$$

الحدث C : سحب كرة بيضاء على الأقل الحدث \bar{C} : عدم سحب كرة بيضاء

$$p(C) = \frac{c_4^1 \times c_5^2 + c_4^2 \times c_5^1 + c_4^3 \times c_5^0}{c_9^3} = \frac{74}{84} \approx 0.88 \text{ ط } p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{c_5^3}{c_9^3} = \frac{74}{84} \approx 0.88$$

(2) قيم المتغير العشوائي X هي: 1 ; 2 ; 3

$$\text{ب/ } X = 1: \text{ سحب 3 كرات بلون واحد } p(X = 1) = p(B) = \frac{c_4^3 + c_3^3}{c_9^3} = \frac{5}{84}$$

$X = 2$: سحب 3 كرات بلونين مختلفين

$$p(X = 2) = \frac{c_4^1 \times c_5^1 + c_3^2 \times c_6^1 + c_2^2 \times c_7^1}{c_9^3} = \frac{55}{84} (R; R; \bar{R}) \text{ أو } (N; N; \bar{N}) \text{ أو } (B; B; \bar{B})$$

$$p(X = 3) = \frac{c_4^1 \times c_3^1 \times c_2^1}{c_9^3} = \frac{24}{84} \text{ "سحب 3 كرات بثلاث ألوان مختلفة"}$$

ج/ ليكن Y متغير عشوائي يمثل الربح الصافي الذي يحققه اللاعب قيمه: +25 ; 0 ; -25.

$$E(Y) = -25 \left(\frac{5}{84}\right) + 0 \left(\frac{55}{84}\right) + 25 \left(\frac{24}{84}\right) = \frac{475}{84} \approx 5.65 \text{ بما أن } E(Y) > 0 \text{ فإن اللعبة مريحة لهذا اللاعب}$$

(3) حساب احتمال ان تكون الكرتان من U_2 بياضين علما أن الكرات المسحوبة من لها نفس اللون:

$$\text{ليكن الحدث } F: \text{ سحب كرتان من } U_2 \text{ بياضين. لدينا: } p_B(F) = \frac{p(B \cap F)}{p(B)}$$

$$p_B(F) = \frac{p(B \cap F)}{p(B)} = \frac{\frac{41}{1260}}{\frac{5}{84}} = \frac{41}{75} \approx 0.55 \text{ ومنه: } p(B \cap F) = \frac{c_4^3}{84} \times \frac{c_5^2}{c_6^2} + \frac{c_3^3}{84} \times \frac{c_2^2}{c_6^2} = \frac{41}{1260}$$

التمرين الثاني:

$$(1) \text{ أ/ التحقق من أن: } z' = \frac{i(z+1-i)}{z+2} \text{ لدينا: } z' = \frac{iz+i+1}{z+2} = \frac{i(z+i+1)}{z+2} = \frac{i(z+1-i)}{z+2}$$

ب/ تبين أن M' تنتمي إلى دائرة (C) : لدينا M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ معناه $AM = BM$

$$\text{ولدينا: } |z'| = \left| \frac{i(z+1-i)}{z+2} \right| = \frac{|i||z+1-i|}{|z+2|} = \frac{|z+1-i|}{|z+2|} \text{ إذن } OM' = 1 \text{ أي } |z'| = 1$$

ومنه M' تنتمي إلى دائرة (C) مركزها O (مبدأ المعلم) ونصف قطرها $r = 1$

ج/ تعيين طبيعة (E) بحيث يكون z' تخيليا صرفا.

$$\checkmark \text{ تخيليا صرفا معناه } Arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ أي } Arg\left(\frac{i(z+1-i)}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{أي } \frac{\pi}{2} + Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ معناه } Arg(i) + Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{ومنه } Arg\left(\frac{z+1-i}{z+2}\right) = k\pi \text{ أي } Arg(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = k\pi$$

المجموعة (E) هي المستقيم (AB) ماعدا النقطتين A و B " $(E) = (AB) - \{A, B\}$ "

$$(2) \text{ أ/ التحقق من أن: } z' - i = \frac{1-i}{z+2} \text{ لدينا } z' - i = \frac{iz+i+1}{z+2} - i = \frac{iz+i+1-iz-2i}{z+2} = \frac{1-i}{z+2}$$

$$\text{ب/ استنتاج أن: } IM' \times AM = \sqrt{2} \text{ لدينا } z' - i = \frac{1-i}{z+2} \text{ أي } |z' - i| = \frac{|1-i|}{|z+2|} \text{ وبالتالي } IM' = \frac{\sqrt{2}}{AM} \text{ ومنه } IM' \times AM = \sqrt{2}$$

$$\text{استنتاج أن: } (\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{لدينا } z' - i = \frac{1-i}{z+2} \text{ أي } Arg(z' - i) = Arg\left(\frac{1-i}{z+2}\right) \text{ أي } Arg(z' - i) = Arg(1-i) - Arg(z+2)$$

$$\text{ومنه } Arg(z' - i) + Arg(z+2) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi] \text{ أي } (\vec{u}, \overrightarrow{IM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi]$$

ج/ لدينا M تنتمي إلى الدائرة (Γ) ذات المركز A ونصف القطر 1 معناه $AM = 1$ ولدينا $AM = \sqrt{2}$

$$\text{أي } IM' = \sqrt{2} \text{ ومنه } M' \text{ تنتمي إلى دائرة مركزها } I \text{ ونصف قطرها } R = \sqrt{2}$$

0.25

	1	-4	6	-4
2	0	2	-4	4
	1	-2	2	0

التمرين الثالث:

(1) $p(2) = 0$ / أي ، تعيين a و b :

ومنه : $p(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 2)$

ب/ حل المعادلة $p(z) = 0$ أي $z - 2 = 0$ أو $z^2 - 2z + 2 = 0$

ومنه حلول المعادلة هي : $z_0 = i$ ، $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = 1 - i$

الشكل المثلثي : $z_0 = e^{i(0)}$ ، $z_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$ ، $z_2 = \sqrt{2}e^{-i(\frac{\pi}{4})}$

(II) تبين أن S تشابه مباشر: لدينا $a = \frac{1+i}{2} \in \mathbb{C}$ و $|a| \neq 1$ اذن هو تشابه مباشر نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ زاويته $\frac{\pi}{4}$ مركزه المبدأ O

أ/ حساب Z_1 ، Z_2 ، Z_3 ، Z_4 ثم تعلّم النقط : A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4

$$Z_4 = \frac{1+i}{2}Z_3 = \frac{-1}{2} \cdot Z_3 = \frac{1+i}{2}Z_2 = \frac{-1+i}{2} \cdot Z_2 = \frac{1+i}{2}Z_1 = i \cdot Z_1 = \frac{1+i}{2}Z_0 = 1 + i$$

ب/ أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$u_n = OA_n = |Z_n| = 2 \text{ وحدها الأول } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ هندسية أساسها } (u_n) \text{ ومنه } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{OA_{n+1}}{OA_n} = \frac{|\frac{1+i}{2}Z_n|}{|Z_n|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_n = u_0 \times q^n = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \text{ : التحقق}$$

$$\text{إيجاد رتبة } n_0 : n_0 \leq 0.1 \text{ أي } u_n \leq 0.1 \text{ نجد } 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0.1$$

$$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n+1} = \frac{4}{2-\sqrt{2}} \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} \right] \text{ : المجموع } T_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{4}{2-\sqrt{2}}$$

$$(3) \text{ الاثبات : } \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2}Z_n - Z_n}{\frac{1+i}{2}Z_n} = i$$

■ الاستنتاج : $\left(\frac{OA_{n+1}}{OA_n}; \frac{A_n A_{n+1}}{OA_n}\right) = \frac{\pi}{2}$ و $OA_{n+1} = A_n A_{n+1}$ أي أن OA_{n+1} قائم في A_{n+1} ومتساوي الساقين

0.25

التمرين الرابع: 1- تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c : $f(0) = -3$ وهذا يعني $c = -3$

0.75

ولدينا $f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$

$f'(0) = 3$ يعني أن $b - c = 3$ ، ومنه $b = 0$ ، $f(\sqrt{3}) = 0$ يعني أن $f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0$ ومنه $a = 1$

1- نضع $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -3$ تصبح $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4t^2}{e^{2t}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty \text{ ، } 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t}\right)^2 = 0$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارة من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين

0.5

3 و -1 ومنه f متناقصة على المجالين $[-1; 3]$ و $[3; +\infty)$ متزايدة على المجال $[-1; 3]$

وشكل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{6}{e^3}$	0

0.5

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع

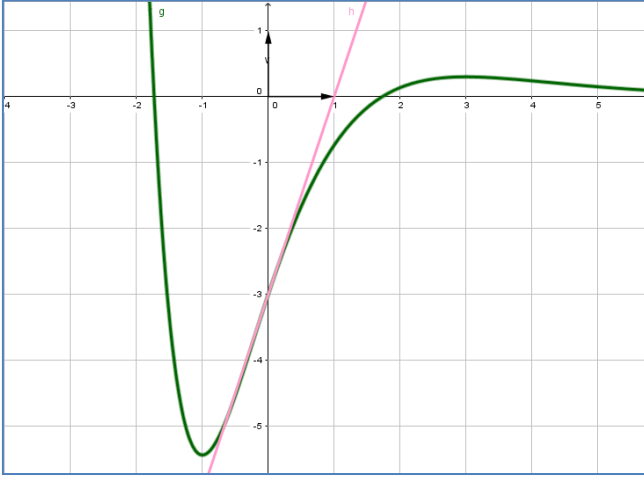
حامل محور الفواصل

$f(x) = 0$ أي $x^2 - 3 = 0$ أي $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع

هما $B(\sqrt{3}; 0)$ و $C(-\sqrt{3}; 0)$

0.5

0.5

-2 رسم (C_f) -3 تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من \mathbb{R} فإن

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} \text{ و}$$

$$f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x} \text{ أي ان}$$

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$= (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R}

0.5

0.5

الدالة $F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x}$ أي $F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$ ومنه الدالة الأصلية للدالة f هي

$$F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x} \text{ ومنه } F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

-4 حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمينالذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$ هي

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} -f(x)dx + \int_{\sqrt{3}}^3 f(x)dx = [-F(x)]_1^{\sqrt{3}} + [F(x)]_{\sqrt{3}}^3$$

$$= (4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}$$

$$A = [(4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}] u.a$$

0.75

 $m-6$ وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$

$$-m = f(x) \text{ يكافئ } -m = (x^2 - 3)e^{-x} \text{ أي ان } me^x = -(x^2 - 3)$$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$ **المنافشة** لما $-m < -2e$ أي ان $m > 2e$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان ومنه ليس للمعادلة حلول .لما $-m = -2e$ أي ان $m = 2e$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .لما $-m > -2e$ أي ان $3 < m < 2e$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان

ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m = -3$ أي ان $m = 3$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين إحداها فاصلتها معدومة والأخرى فاصلتها

سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداها معدوم والأخر سالب .

لما $-m > -3$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفتان في الإشارة

ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .

لما $-m > 0$ أي ان $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما

موجبتان ونقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان وحل سالب .

لما $-m = \frac{6}{e^3}$ أي ان $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفتان في الإشارة ومنه

للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة

لما $-m > \frac{6}{e^3}$ أي ان $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

الأستاذ: تونسي ن يمني لكم التوفيق والنجاح