



## المستوى: السنة الثالثة تسيير و اقتصاد فيفري 2021

### اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات المدة: ساعتين

#### التمرين الأول

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{9}$ .

(1) أ- أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$  ثم بين أن  $(u_n)$  ليست حسابية ولا هندسية.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أن  $n > \frac{2}{3}$ .

ج- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ .

لبيّن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

بإكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ , ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $u_n = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$ .

ج) ماهي نهاية المتتالية  $(u_n)$ ؟

3) احسب، بدلالة  $n$ , المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

#### التمرين الثاني

I)  $g$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بالعلاقة:  $g(x) = x^3 - 3x - 3$ .

(1) ادرس تغيرات الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

(2) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $2 < \alpha < 3$ .

(3) استنتج إشارة  $g(x)$ .

II)  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  بالعلاقة:  $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني

في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}; \vec{j})$ .

(1) احسب نهايات الدالة  $f$  عند اطراف مجموعة تعريفها.

(2) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  فإن:  $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$ .

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن  $f(\alpha) = 3\alpha + 1$  ثم عين حصرا لـ  $f(\alpha)$ .

(5) ا) بين أن المستقيم  $(d)$  الذي معادلته  $y = 2x + 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

(6) اوجد فواصل النقط من  $(C_f)$  التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم  $(d)$ .

(7) ارسم المستقيمات المقاربة والمنحنى  $(C_f)$ .

## التصحيح النموذجي

### التمرين 1:

(1) حساب الحدود :

$$u_3 = \frac{55}{81} \quad \text{و} \quad u_2 = \frac{57}{81} \quad \text{و} \quad u_1 = \frac{7}{9}$$

تبيان أن  $(u_n)$  ليست حسابية ولا هندسية

$$u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1 \quad \text{ومنه} \quad (u_n) \text{ ليست حسابية.}$$
$$\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1} \quad \text{ومنه} \quad (u_n) \text{ ليست هندسية.}$$

(ب) البرهان بالتراجع :

تسمى هذه الخاصية بـ  $P(n)$

المرحلة 01: من أجل  $n = 0$

$$\text{لدينا: } u_0 = 1 > \frac{2}{3} \quad \text{إذن: } P(0) \text{ صحيحة.}$$

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية  $P(n)$  أي:  $u_n > \frac{2}{3}$  (فرضية التراجع)

• ونبرهن صحة الخاصية  $P(n+1)$  أي:  $u_{n+1} > \frac{2}{3}$ .

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا:  $u_n > \frac{2}{3}$

$$\text{ومنه: } \frac{3}{9} u_n > \frac{2}{9}$$

$$\text{وعليه: } \frac{3}{9} u_n + \frac{4}{9} > \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$$

$$\text{أي: } u_{n+1} > \frac{2}{3}$$

وبالتالي:  $P(n+1)$  صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ,  $u_n > \frac{2}{3}$ .

ببتبيان أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة:

ندرس إشارة الفرق  $u_{n+1} - u_n$

$$\text{• لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{3}{9} u_n + \frac{4}{9} - u_n = \left(\frac{3}{9} - 1\right) u_n + \frac{4}{9} = -\frac{6}{9} u_n + \frac{4}{9}$$

• ولدينا من جهة أخرى:  $u_n > \frac{2}{3}$

$$\text{ومنه: } -\frac{6}{9} u_n < -\frac{4}{9}$$

$$\text{وعليه: } -\frac{6}{9} u_n + \frac{4}{9} < -\frac{4}{9} + \frac{4}{9}$$

أي:  $u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن:  $(u_n)$  متناقصة تماما.

2) لدينا:  $(v_n)$  متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ:  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ .  
 لتبيان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية، نطلب تحديد أساسها وحدها الأول:

نكتب  $v_{n+1}$  بدلالة  $v_n$ .

لدينا:  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ، ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{3}{9}u_n + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{3}{9}u_n - \frac{2}{9} = \frac{3}{9}u_n - \frac{3 \times 2}{9 \times 3} = \frac{3}{9} \left( u_n - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{9}v_n$$

أي:  $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

إذن:  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{3}$  وحدها الأول  $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

بكتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ :

لدينا:  $v_n = v_0 \times q^n$ ، ومنه:  $v_n = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} \right)^n$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$

لدينا:  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ ، ومنه:  $u_n = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} \right)^n + \frac{2}{3}$ ، إذن:  $u_n = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$

(ج) حساب نهاية المتتالية  $(u_n)$ :

لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n = 0$  (لأن  $-1 < \frac{1}{3} < 1$ )، إذن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$

3) حساب  $S_n$  بدلالة  $n$ ، المجموع  $S_n$  حيث  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

لدينا:  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \left( v_0 + \frac{2}{3} \right) + \left( v_1 + \frac{2}{3} \right) + \left( v_2 + \frac{2}{3} \right) + \dots + \left( v_n + \frac{2}{3} \right)$

ومنه:  $S_n = (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) + \frac{2}{3}(n - 0 + 1) = v_0 \left( \frac{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \right) + \frac{2}{3}(n + 1)$

وعليه:  $S_n = \frac{1}{3} \left( \frac{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \right) + \frac{2}{3}(n + 1) = \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{n+1} \right) + \frac{2}{3}(n + 1)$

## التمرين 2

$$g(x) = x^3 - 3x - 3 \quad (I)$$

1) دراسة تغيرات الدالة  $g$ :

\* النهايات:  $D_g = ]-\infty; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

\* اتجاه التغير:

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$  ومنه  $g'(x) = 0$  معناه  $x = 1$  أو  $x = -1$  و

$g'(x) > 0$  معناه  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$  وأيضا  $g'(x) < 0$  معناه  $x \in ]-1; 1[$ .

جدول التغيرات:

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$		$0$	$0$	
		$+$	$-$	$+$
$g(x)$		$-1$		$+\infty$
	$-\infty$		$-5$	

(2) اثبات ان للمعادلة  $g(x)=0$  حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $2 < \alpha < 3$  :

الدالة  $g$  مستمرة على المجال  $]2;3[$  و  $g(2)=-1$  و  $g(3)=15$  أي  $g(2) \times g(3) < 0$  اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة نستنتج ان للمعادلة  $g(x)=0$  على الأقل حل في المجال  $]2;3[$  ومن خلال جدول التغيرات ينتج ان الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $]2;3[$  اذن فللمعادلة  $g(x)=0$  حلا وحيدا في المجال  $]2;3[$ .

(3) استنتاج إشارة  $g(x)$  : من خلال جدول التغيرات نلاحظ ان المنحني يقع تحت محور

الفواصل لما  $x \in ]-\infty; \alpha[$  ومنه نستنتج ان  $g(x) < 0$  معناه  $x \in ]-\infty; \alpha[$  و كذلك

المنحني يقع فوق محور الفواصل لما  $x \in ]\alpha; +\infty[$  أي  $g(x) > 0$  معناه  $x \in ]\alpha; +\infty[$ .

(II) الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1;1\}$  بـ :  $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1}$

(1) حساب النهايات:  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

(2) اثبات انه من اجل كل  $x \in D_f$  فان :  $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(2x^3 + x^2 + 2)'(x^2 - 1) - (2x^3 + x^2 + 2)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(6x^2 + 2x)(x^2 - 1) - (2x^3 + x^2 + 2) \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 + 2x^3 - 2x - 4x^4 - 2x^3 - 4x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^3 - 3x - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

(3) دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  وتشكيل جدول تغيراتها:

لنا  $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$  أي ان إشارة  $f'(x)$  من نفس إشارة  $xg(x)$  :

## جدول الإشارة:

$x$	$-\infty$		-1		0	1		$\alpha$		$+\infty$	
$x$			-		-	0	+		+	+	
$g(x)$			-		-	-	-		-	0	+
$f'(x) = xg(x)$			+		+	0	-		-	0	+

من خلال هذا الجدول نستنتج ان الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجموعة  $]0; 1[ \cup ]\alpha; +\infty[$  ومتناقصة تماما على المجموعة  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[ \cup ]1; \alpha[$ .

جدول التغيرات:

$x$	$-\infty$		-1		0	1		$\alpha$		$+\infty$	
$f'(x)$		+			+	0	-		-	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$		$-\infty$	-2	$-\infty$		$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(4) اثبات ان  $f(\alpha) = 3\alpha + 1$  وتعيين حصر لـ  $f(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} f(\alpha) - 3\alpha - 1 &= \frac{2\alpha^3 + \alpha^2 + 2}{\alpha^2 - 1} - 3\alpha - 1 \\ &= \frac{2\alpha^3 + \alpha^2 + 2 - 3\alpha^3 + 3\alpha - \alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{-\alpha^3 + 3\alpha + 3}{\alpha^2 - 1} \\ &= -\frac{\alpha^3 - 3\alpha - 3}{\alpha^2 - 1} = -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2 - 1} = 0 \end{aligned}$$

لان  $g(\alpha) = 0$

اذن نجد  $f(\alpha) - 3\alpha - 1 = 0$  ومنه  $f(\alpha) = 3\alpha + 1$ .

تعيين الحصر: لنا  $2 < \alpha < 3$  ومنه  $6 < 3\alpha < 9$  ومنه  $7 < 3\alpha + 1 < 10$  أي  $7 < f(\alpha) < 10$ .

