الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية المسيلة

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — ثانوية :

الشعبة : تسيير واقتصاد — دورة ماي : 2018

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 3 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأوّل :

التمرين الأول: (4 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$

1) ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$.

ب) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 3$.

ا) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n .

ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

3) احسب بدلالة n المجموع S_n و S'_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

و $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر كثير الحدود $P(x)$ حيث : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 15x + 18$.

1) احسب $P(2)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$

حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.

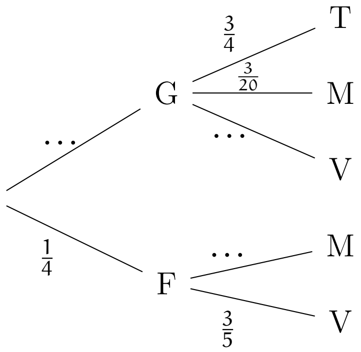
4) استنتج حلول المعادلتين :

أ) $2e^{3x} - e^{2x} - 15e^x + 18 = 0$.

ب) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 15(\ln x) + 18 = 0$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في تجربة عشوائية مُنمذجة بشجرة الاحتمالات التالية :



1) انقل الشجرة المقابلة على ورقة إجابتك ثم أتممها.

2) أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة :

ا) $P_G(V) = \frac{1}{10}$

ب) $P(G \cap T) = \frac{3}{4}$

ج) $P(M) = \frac{11}{20}$

د) $P_M(G) = \frac{9}{17}$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ، كما يلي : $g(x) = -3 + 3x^3 + 6\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2) أُحسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = 3x - 3 - \frac{3\ln x}{x^2}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (يعطى : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$)

2) بيّن أنّ من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها .

3) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 3x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

4) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

5) انشئ (C_f) و (Δ) .

6) نعتبر الدالة F المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $F(x) = -3\left(\frac{1 + \ln x}{x}\right)$.

ا) بيّن أنّ الدالة F أصلية للدالة $x \longmapsto \frac{3\ln x}{x^2}$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = 1$ ، $x = e$ و محور الفواصل .

الموضوع الثّاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرّفة بـ : $u_0 = -2$. ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

I) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n + \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي غير معدوم.

1) عيّن قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 .

II) نعتبر في كل مما يلي : $\alpha = 3$.

1) أُكتب v_n و u_n بدلالة n .

2) أُحسب بدلالة n المجموع S_n و S'_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

و $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

3) لتكن المتتالية (w_n) المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = \ln(v_n)$.

ا) بيّن أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها .

ب) استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n = (2)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لتفسير ارتفاع درجة حرارة الغلاف الجوي (الاحتباس الحراري)، تم قياس متوسط درجة الحرارة السنوية لكوكب الأرض بين السنتين 1974 و 1998 ، سجّلت النتائج في الجدول أدناه:

السنة	1974	1978	1982	1986	1990	1994	1998
رتبة السنة x_i	4	8	12	16	20	24	28
درجة الحرارة المئوية y_i	19.12	19.70	19.62	20	20.60	20.88	20.92

1) مثّل سحابة النقط المرفقة بالسلسلة الإحصائية $M(x_i ; y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O(0;18)$.

(وحدة الرسم : $1\,\text{cm}$ لكل سنتين على محور الفواصل و $5\,\text{cm}$ لكل درجة واحدة على محور التراتيب).

2) جد إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السلسلة ثم علّمها .

3) بيّن أن معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا لهذه السلسلة هي : $y = 0.078x + 18.872$ ثم أُرسمه .

4) ا) بقراءة بيانية ، قدّر درجة الحرارة في سنة 2005 .

ب) باستعمال التعديل السابق ، في أيّ سنة ستتجاوز درجة الحرارة 22.5 درجة مئوية؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

تتكون باقة زهور من ثلاث زهرات حمراء (R) وزهرتين صفراوين (J) . نختار عشوائيا على التوالي زهرتين من الباقة وبدون ارجاع .

1) مثل هذه الوضعية بشجرة احتمالات .

2) احسب احتمال الحوادث التالية :

ا) A : حادثة "الحصول على زهرتين حمراوين" .

ب) B : حادثة "الحصول على زهرتين مختلفتين في اللون" .

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل مخرج (نتيجة) عدد الزهرات الصفراء المختارة.

ا) ماهي قيم X .

ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي والتباين .

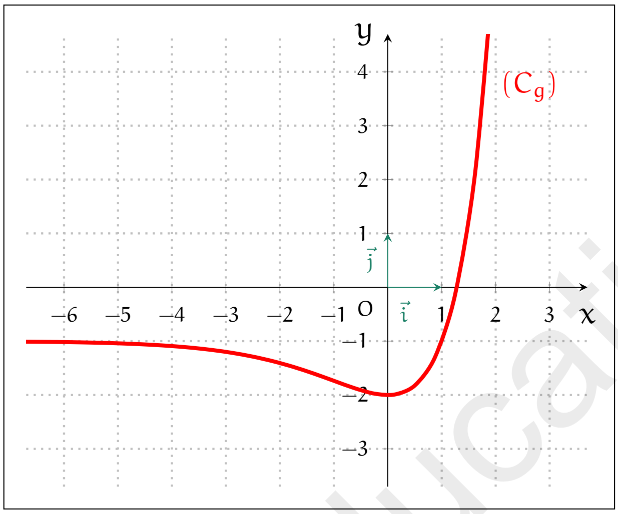
التمرين الرابع: (08 نقاط)

1) g دالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$

كما يلي : $g(x) = -1 + (x-1)e^x$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$(الرسم المقابل)



ا) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.2 < \alpha < 1.3$

ج) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{2x}{e^x + 1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

ا) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \dfrac{2}{\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}}$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وفسّرها بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - 2x]$ فسر بيانيا النتيجة .

ج) أُدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x$.

د) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{-2g(x)}{(e^x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

هـ) انشئ (Δ) و (C_f) .

3) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة : $f(x) = m$.

تصحيح امتحان البكالوريا التجريبي

التمرين الأول:

u_n متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$.

1) ا) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$.

نسمي الخاصية $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n) : u_n > 3$

من أجل $n = 0$: $p(0) : u_0 = 4 > 3$ ومن الخاصية صحيحة.

نفرض صحة الخاصية $p(n)$ ونبرهن صحة الخاصية :

$p(n+1) : p(n+1) = u_{n+1} > 3$

أي : $p(n+1) = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} > 3$.

لدينا $u_n > 3$ نضرب طرفي المتراجحة في $\frac{1}{2}$ ثم نضيف $\frac{3}{2}$ أي :

$$
\begin{aligned}
&u_n > 3\\
&\frac{1}{2}u_n > \frac{1}{2} \times 3\\
&\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} > \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\\
&u_{n+1} > 3
\end{aligned}
$$

إذن الخاصية $p(n+1)$ صحيحة ، ومنه حسب البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$.

ب) نبرهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$:

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} - u_n\\
&= \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{2}u_n + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

ندرس اشارة الفرق باستعمال $u_n > 3$ ، بضرب طرفي المتراجحة في $-\frac{1}{2}$ ثم نضيف $\frac{3}{2}$ أي :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}u_n < 3 \times -\frac{1}{2}\\
&-\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} < \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\\
&u_{n+1} - u_n < 0
\end{aligned}
$$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 فإنها متقاربة.

2) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $v_n = u_n - 3$.

ا) نبين أن المتتالية (v_n) هندسية مع تعيين أساسها وحدها الأول :

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 3\\
&= \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} - 3\\
&= \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(u_n - 3) = \frac{1}{2}v_n
\end{aligned}
$$

ومنه v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = 1$.

ب) عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ج) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$

لديا : $u_n = v_n + 3$ ومنه $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\\
&= 3 \qquad \text{لأن } \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0
\end{aligned}
$$

3) حساب المجموع S_n : S_n هو مجموع لحدود المتتالية الهندسية v_n أي :

$$
\begin{aligned}
S_n &= v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)\\
&= \left(\frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2}^{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

حساب المجموع S'_n بدلالة n :

$$
\begin{aligned}
S'_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n\\
&= v_0 + 3 + v_1 + 3 + \cdots + v_n + 3\\
&= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{\text{n+1 مرة}}\\
&= S_n + 3(n+1)\\
&= 2\left(1 - \frac{1}{2}^{n+1}\right) + 3(n+1)
\end{aligned}
$$

التمرين الثاني :

$P(x)$ كثير حدود حيث : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 15x + 18$.

1) حساب $P(2)$: $P(2) = 2(2)^2 - 2^2 - 15 \times 2 + 18 = 0$.

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$:

باستعمال النشر والتبسيط :

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x-2)(ax^2 + bx + c)\\
&= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c\\
&= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c
\end{aligned}
$$

بالمطابقة مع العبارة : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 15x + 18$ نجد :
$$
\begin{cases}
a = 2\\
b - 2a = -1\\
-2c = 18
\end{cases}
$$

$b - 2a = -1$ معناه $b = -1 + 2a$ أي $b = 3$.

$-2c = 18$ معناه $c = -9$

ومنه $a = 2$ ، $b = 3$ و $c = -9$.

أو باستخدام القسمة الاقليدية :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -x^2 & -15x & +18 & x - 2\\
\cline{5-5}
-2x^3 & +4x^2 & & & 2x^2 + 3x - 9\\
\cline{1-2}
& 3x^2 & -15x & &\\
& -3x^2 & +6x & &\\
\cline{2-3}
& & -9x & +18 &\\
& & 9x & -18 &\\
\cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}
$$

ومنه $P(x) = (x-2)(2x^2 + 3x - 9)$

3) حل المعادلة $P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$:

$P(x) = (x-2)(2x^2 + 3x - 9) = 0$ معناه $(x-2) = 0$ أي $x = 2$

أو $(2x^2 + 3x - 9) = 0$ نحسب المميز Δ :

$$
\begin{aligned}
\Delta &= (3)^2 - 4 \times 2 \times (-9)\\
&= 9 + 72 = 81 > 0
\end{aligned}
$$

ومنه يوجد حلان للمعادلة : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ومنه $x_1=\frac{-3-\sqrt{81}}{4}$ أي :
$x_1=\frac{-3-9}{4}=\frac{-12}{4}=-3$.
$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ومنه $x_2=\frac{-3+\sqrt{81}}{4}$ أي :
$x_2=\frac{-3+9}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

ومنه حلول المعادلة $P(x)=0$ في $\mathbb{R}$ هي : $S=\left\{-3;\frac{3}{2};2\right\}$

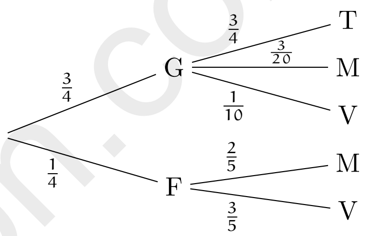
4) استنتاج حلول المعادلتين :

ا) $2e^{3x}-e^{2x}-15e^{x}+18=0$:
بوضع : $X=e^{x}$ نجد : $2X^3-X^2-15X+18=0$ ومنه الحلول من الشكل : $x=\ln X$ أي : $S=\left\{\ln\left(\frac{3}{2}\right);\ln 2\right\}$

ب) $2(\ln x)^3-(\ln x)^2-15(\ln x)+18=0$:
بوضع : $\ln x=X$ نجد : $2X^3-X^2-15X+18=0$ ومنه الحلول من الشكل : $x=e^{X}$ أي : $S=\left\{e^{-3}\ ;\ e^{\frac{3}{2}}\ ;\ e^{2}\right\}$

التمرين الثالث :

1) اتمام الشجرة :



2) الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير :

ا) $P_G(V)=\frac{1}{10}$ "صحيح"
التبرير :
لدينا : $P_G(V)=\frac{P(G\cap V)}{P(G)}$ ، ومنه: $P(G\cap V)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{40}$
إذن : $P_G(V)=\frac{\frac{3}{40}}{\frac{3}{4}}=\frac{3}{40}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{10}$.

ب) $P(G\cap T)=\frac{3}{4}$ "خطأ"
التبرير :
لدينا : $P(G\cap T)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}\neq\frac{3}{4}$.

ج) $P(M)=\frac{11}{20}$ "خطأ"
التبرير :
$P(M)=P(F\cap M)+P(G\cap M)$ ومنه :

$$P(M)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{20}$$
$$=\frac{2}{20}+\frac{9}{80}=\frac{17}{80}\neq\frac{11}{20}$$

د) $P_M(G)=\frac{9}{17}$ "صحيح"
التبرير :
$P_M(G)=\frac{P(G\cap M)}{P(M)}$ ، ومنه : $P_M(G)=\frac{\frac{9}{80}}{\frac{17}{80}}$
وبالتالي : $P_M(G)=\frac{9}{80}\times\frac{80}{17}=\frac{9}{17}$.

التمرين الرابع :

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ، كما يلي : $g(x)=-3+3x^3+6\ln x$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :
النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} -3+3x^3+6\ln x=+\infty+\infty=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0} -3+3x^3+6\ln x=-\infty$$

حساب المشتقة الدالة g' :
الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة g' هي : $g'(x)=9x^2+\frac{6}{x}$
دراسة اشارة $g'(x)$:
من أجل كل $x\in\,]0;+\infty[$ $g'(x)=9x^2+\frac{6}{x}>0$ ومنه :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

2) حساب $g(1)$: $g(1)=-3+3\times1^3+6\ln 1=0$
استنتاج اشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$: من جدول التغيرات نجد :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=3x-3-\frac{3\ln x}{x^2}$.

1. حساب $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$:

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0} 3x-3-\frac{3\ln x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\overset{>}{\to}0} -\frac{3\ln x}{x^2}=-(-\infty)=+\infty$$

حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3x-3-\frac{3\ln x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} +\infty-0\quad,\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0\right)$$
$$=+\infty$$

2. نبيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$:

$$f'(x)=3-\left(\frac{3\frac{1}{x}\cdot x^2-2x(3\ln x)}{x^4}\right)=3-\left(\frac{3x-6x\ln x}{x^4}\right)$$
$$=3-\frac{x(3-6\ln x)}{x^4}$$
$$=3-\frac{(3-6\ln x)}{x^3}=\frac{3x^3-3+6\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f :
لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $x^3>0$ ، فالاشارة من اشارة $g(x)$ التي درسناها

فيما سبق إذن :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

3. نبيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=3x-3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}3x-3-\frac{3\ln x}{x^2}-(3x-3)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{3\ln x}{x^2}=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=3x-3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

4. دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

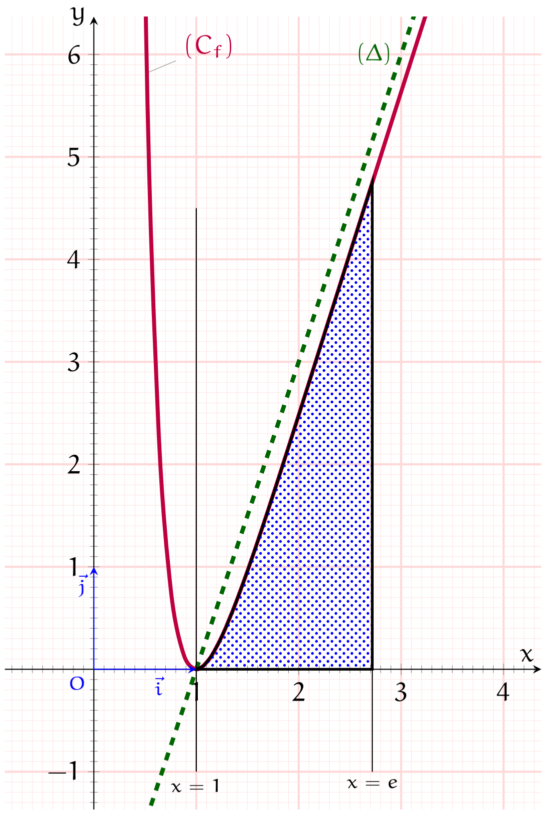
ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$ أي : $f(x)-y=-\dfrac{3\ln x}{x^2}=0$ ومنه $\ln x=0$ وبالتالي $x=1$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||		$+$		
$-\dfrac{3\ln x}{x^2}$	||	$+$	0	$-$	

ومنه (C_f) يقع أعلى (Δ) لما $x\in]0;1]$.

(C_f) يقع أسفل (Δ) لما $x\in[1;+\infty[$.

5. رسم (C_f) و (Δ) :



6. نعتبر الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ : $F(x)=-3\left(\dfrac{1+\ln x}{x}\right)$.

ا) نبيّن أنّ الدالة F أصلية للدالة $x\longmapsto\dfrac{3\ln x}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$:

$$F'(x)=-3\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)}{x^2}\right)$$
$$=-3\frac{1-1-\ln x}{x^2}$$
$$=-3\frac{(-\ln x)}{x^2}=\frac{3\ln x}{x^2}$$

ب) حسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x=1$ ، $x=e$ و محور الفواصل :

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(3x-3-\frac{3\ln x}{x^2}\right)dx$$
$$=\left[\frac{3}{2}x^2-3x-(-3)\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)\right]_1^e$$
$$=\frac{3}{2}e^2-3e+3\left(\frac{1+\ln e}{e}\right)$$
$$-\left[\frac{3}{2}1^2-3\cdot1+3\left(\frac{1+\ln 1}{1}\right)\right]$$
$$=\frac{3}{2}e^2-3e+\frac{6}{e}-\frac{3}{2}+3-3=\frac{3}{2}e^2-3e+\frac{6}{e}-\frac{3}{2}\ \text{cm}^2$$

الموضوع الثاني :

التمرين الأول :

(u_n) متتالية عددية معرّفة بـــ : $u_0=-2$. ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=2u_n+3$.

I) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n=u_n+\alpha$ ، حيث α عدد حقيقي غير معدوم.

1) تعيين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 معناه : $v_{n+1}=2v_n$

$$u_{n+1}+\alpha=2u_n+3+\alpha=2(u_n+\alpha)$$
$$2u_n+3+\alpha=2u_n+2\alpha$$
$$2\alpha-\alpha=3$$
$$\alpha=3$$

II) 1) كتابة v_n بدلالة n :

v_n متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0=u_0+3$ أي $v_0=u_0+3=-2+3=1$ ، ومنه عبارة الحد العام : $v_n=2^n$

لدينا : $u_n=v_n-3$ أي : $u_n=2^n-3$.

2) حساب بدلالة n المجموع S_n ، حيث : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$.

S_n مجموع لمتتالية هندسية ، إذن : $S_n=\dfrac{1-2^{n+1}}{1-2}$

ومنه $S_n=-(1-2^{n+1})=2^{n+1}-1$

حساب بدلالة n المجموع S'_n ، حيث : $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

$$S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$
$$=v_0-3+v_1-3+\cdots+v_n-3$$
$$=(v_0+v_1+\cdots+v_n)-\underbrace{(3+3+\cdots+3)}_{n+1\ \text{مرة}}$$
$$=S_n-3(n+1)=2^{n+1}-1-3n-3$$
$$=2^{n+1}-3n-4$$

3) لتكن المتتالية (w_n) المعرفة بـــ : من أجل كل عدد طبيعي n، $w_n=\ln(v_n)$

ا) نبيّن أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها :

$$\begin{aligned} w_{n+1}-w_n &= \ln(v_{n+1})-\ln(v_n)=\ln(2^{n+1})-\ln(2^n)\\ &=(n+1)\ln 2-n\ln(2)=\ln 2+n\ln 2-n\ln(2)\\ &=\ln 2 \end{aligned}$$

ومنه w_n متتالية حسابية أساسها $r=\ln 2$
وحدها الاول $w_0=\ln(v_0)=\ln 1=0$.

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

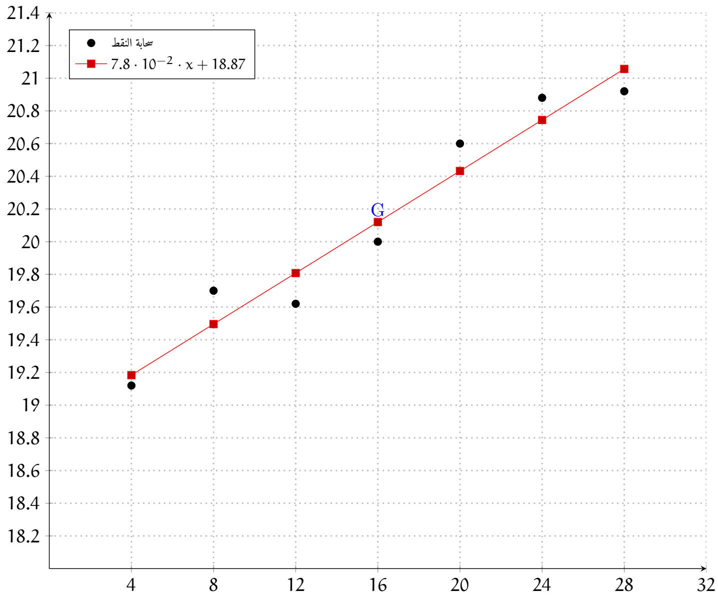
$$v_0\times v_1\times\cdots\times v_n=(2)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

بما أن: $w_n=\ln(v_n)$ فإن : $v_n=e^{w_n}$

$$\begin{aligned} v_0\times v_1\times\cdots\times v_n &= e^{w_1}\times e^{w_2}\times\cdots\times e^{w_n}\\ &= e^{w_1+w_2+\cdots+w_n} && \text{(مجموع متتالية حسابية)}\\ &= e^{\frac{n+1}{2}(w_n)}=e^{\frac{n+1}{2}(\ln(v_n))}\\ &= e^{\frac{n+1}{2}\ln(2^n)}=e^{\ln 2^{\left(n\times\frac{n+1}{2}\right)}} && \text{(خواص الدالة اللوغاريتمية)}\\ &= (2)^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

التمرين الثاني :

1) تمثيل سحابة النقط المرفقة بالسلسلة الإحصائية $M(x_i\,;\,y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O(0;18)$



2) إحداثي النقطة المتوسطة G لهذه السلسلة : $G(\bar{x};\bar{y})$

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{7}\frac{4+8+12+16+20+24+28}{7}=16$$

$$\bar{y}=\sum_{i=1}^{7}\frac{19.12+19.70+19.62+20+20.6+20.08+20.92}{7}=20.12$$

ومنه $G(16;20.12)$

3) معادلة مستقيم الانحدار:

$$a=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7}x_i\cdot y_i-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\frac{1}{7}\cdot 2288.4-321.92}{\frac{488}{7}}\simeq 0.078$$

$$b=\bar{y}-a\cdot\bar{x}=20.12-0.078\times16=20.12-1.28=18.872$$

ومنه معادلة مستقيم الإنحدار هي : $y=0.078x+18.872$

4) ا) درجة الحرارة في سنة 2005: رتبة سنة 2005 هي $2005-1974+4=35$
ومنه : $y=0.078\times35+18.872=21.602$.

ب) ستتجاوز درجة الحرارة 22.5 درجة مئوية سنة :

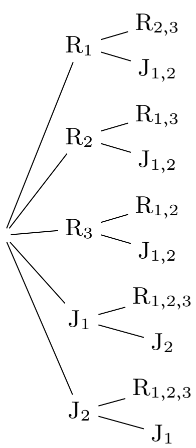
$$x=\frac{y-18.872}{0.078}=\frac{22.5-18.872}{0.078}\simeq 46$$

ومنه $1974+46=2020$.

التمرين الثالث :

تتكون باقة زهور من ثلاث زهرات حمراء (R) وزهرتين صفراوين (J) . نختار عشوائيا على التوالي زهرتين من الباقة وبدون ارجاع .

1) تمثيل هذه الوضعية بشجرة احتمالات .



2) حساب احتمال الحوادث التالية :

ا) حادثة A "الحصول على زهرتين حمراوين":
$P(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}=0.3$.

ب) حادثة B "الحصول على زهرتين مختلفتين في اللون" :
$P(B)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}=0.6$.

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل مخرج (نتيجة) عدد الزهرات الصفراء المختارة.

ا) قيم X : $X\in\{0;10;2\}$ ، حيث : $X=0$ عدم الحصول على أي زهرة صفراء ، $X=1$ الحصول على زهرة صفراء واحدة و $X=2$ الحصول على زهرتين صفراوين.

ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

- حساب الأمل الرياضياتي $E(x)$: لدينا : $E(x)=\sum_{i=2}^{3}P_i\cdot x_i$ أي :

$E(x)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}=0.8$.

- حساب التباين $V(x)$: لدينا : $V(x)=\left(\sum_{i=2}^{3}P_i\cdot x_i^2\right)-E^2(x)$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$
x_i^2	0	1	4
$P_i\cdot x_i^2$	0	$\frac{3}{5}=0.6$	$\frac{4}{10}=0.4$

ومنه: $V(x)=0.6+0.4-(0.8)^2=1-0.64=0.36$.

التمرين الرابع :

1) g دالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$
كما يلي : $g(x) = -1 + (x-1)e^x$
وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

ا) بقراءة بيانية نشكل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

ب) أثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.2 < \alpha < 1.3$:
الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0; +\infty[$.
$g(1.2) = -1 + (1.2-1)e^{1.2} \simeq -0.34$
$g(1.3) = -1 + (1.3-1)e^{1.3} \simeq 0.1$ ، أي :
$g(1.2) \times g(1.3) < 0$
ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.2 < \alpha < 1.3$.

ج) اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$: من التمثيل البياني لدينا:
- لما $x \in]-\infty; \alpha[$ المنحنى يقع تحت محور الفواصل ، إذن $g(x) < 0$.
- لما $x \in [\alpha; +\infty[$ المنحنى يقع فوق محور الفواصل ، إذن $g(x) > 0$.

ومنه جدول الاشارة يكون كالآتي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{2x}{e^x+1}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

2) ا) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \dfrac{2}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}}$:

$$f(x) = \frac{2x}{e^x+1} = \frac{2}{\frac{e^x+1}{x}} = \frac{2}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}} = \frac{2}{+\infty + \frac{1}{+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$y = 0$ مستقيم مقارب موازي محور الفواصل بجوار $+\infty$ لـ (C_f)

ب)
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}} = \frac{2}{0 + \frac{1}{-\infty}} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} [f(x) - 2x] = \frac{2x}{e^x+1} - 2x = \frac{2x - 2xe^x - 2x}{e^x+1} = \frac{-2xe^x}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2xe^x}{e^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

ومنه $y = 2x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ج) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x$:
لدينا : $f(x) - 2x = \dfrac{-2xe^x}{e^x+1}$ ، $e^x > 0$ إذن $e^x + 1 > 0$ ومنه الإشارة من اشارة البسط :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x			$+$		
$-2x$		$+$	0	$-$	
$-2xe^x$		$+$	0	$-$	
$f(x) - 2x$		$+$	0	$-$	

ومنه (C_f) يقع أعلى (Δ) لما $x \in]-\infty; 0]$. (C_f) يقع أسفل (Δ) لما $x \in [0; +\infty[$.

د) نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{-2g(x)}{(e^x+1)^2}$:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1 \cdot (e^x+1) - e^x(x)}{(e^x+1)^2} = 2 \cdot \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= 2 \cdot \frac{1 + (1-x)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{-2(-1+(x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{-2g(x)}{(e^x+1)^2}$$

بما أن المقام موجب تماما فالإشارة من اشارة البسط ، أي عكس اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$-2g(x)$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{-2g(x)}{(e^x+1)^2}$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

3) المناقشة :
على المجال $]-\infty; 0[$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب . و على المجال $[0; f(\alpha)[$ المعادلة تقبل حلين موجبين ; و من اجل $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل وحيد.
و على المجال $]\alpha; +\infty[$ المعادلة لا تقبل حلا.