الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2020

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات

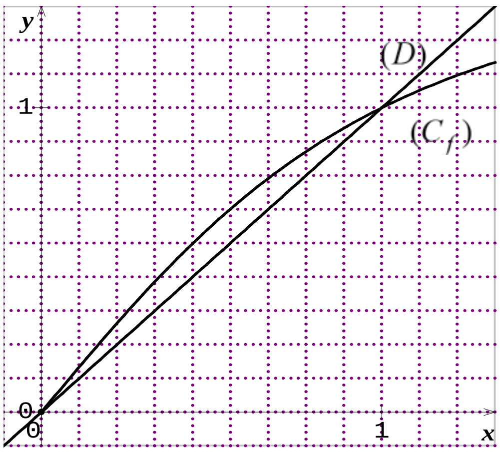
المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

الدالة العددية f معرفة ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{4x^2+5}}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ و (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$.



المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث: $u_0=\frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ . أعد رسم الشكل المقابل ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الإنشاء.

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ . برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{1}{2}\le u_n<1$.

ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{u_n^2}{1-u_n^2}$

برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{9}{5}$ يُطلب تعيين حدها الأول v_0.

4) أ . اكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ب. احسب نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المعادلتين : $693x-216y=738\cdots(E_1)$ و $77x-24y=82\cdots(E_2)$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) جِد $PGCD(693;216)$ و استنتج أنّ المعادلتين (E_1) و (E_2) متكافئتان.

2) تحقّق أنّ الثنائية $(2;3)$ حلّ للمعادلة (E_2) ثمّ أوجد حلولها في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

3) جِد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تُحقّق: $|y-x|\le 54$.

4) ليكن N عددا طبيعيا يُكتب $\overline{\beta 68\alpha}$ في النظام ذي الأساس 9 و يكتب $\overline{1\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 6.

حيث α و β عددان طبيعيان.

جِد العددين α و β ، ثمّ اكتب العدد N في النظام العشري.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2، 2 ، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3 ، 3 ، 2.
الكريات لا نفرق بينها باللمس ، نسحب عشوائيا في آن واحد كريتين من هذا الكيس.

1) نعتبر الحدثين: A "الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم" و B "الحصول على كريتين مختلفتين في اللون"

أ . احسب احتمال كل من الحدثين A و B.

ب. بيّن أنّ احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرّقم ومختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$.

جـ. استنتج احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرّقم أو مختلفتين في اللون .

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب جُداء الرّقمين الظاهرين على الكريتين المسحوبتين.

عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X.

3) في لعبة، يقوم لاعب بسحب كريتين: إذا كان جُداء رقميهما 4 يربح x^2 دينار، إذا كان جُداء رقميهما 6 يخسر y^2 دينار و إذا كان جُداء رقميهما 9 يخسر 130 دينار. (x و y عددان طبيعيان غير معدومين)

عيّن قيمة كلّ من x و y حتى تكون هذه اللعبة عادلة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+x+2\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيرات الدالة g.

2) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

II) الدالة العددية f معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{-1+(x-2)\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ . احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب. عيّن اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) ليكن (Γ) المنحنى البياني الممثّل للدالة: $x\mapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

أ . احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ).

4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β ، ثمّ تحقّق أنّ :

$0,5<\alpha<0,6$ و $2,9<\beta<3$.

5) ارسم (Γ) ثمّ (C_f).

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على كريتين خضراوين تحملان الرّقمين 1 ، 2 وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 و أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 2 ، 3 ، 3 ، 4. (الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

I) نسحب من هذا الكيس 3 كريات في آن واحد .

1) احسب احتمال كل من الحدثين A و B التاليين:

A :" الحصول على 3 كريات من نفس اللون ".

B:" الحصول على كرية بيضاء على الأقل ".

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب أكبر الأرقام المحصل عليها.

أ . بيّن أنّ: $P(X=3)=\frac{3}{7}$ ثمّ عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X .

ب. احسب الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X .

II) نسحب الآن 3 كريات على التوالي دون إرجاع.

ليكن C الحدث: " الحصول على 3 أرقام جُداؤها عدد زوجي" .

احسب احتمال C .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) أ . ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $8^{2020}-2\times3^{1441}-1$ على 5.

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نعتبر العدد الطبيعي a_n حيث: $a_n=3^{n+1}+4$.

عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $a_n\equiv0[5]$.

3) نعتبر العدد الطبيعي b_n حيث: $b_n=7a_n+5$.

أ . عيّن القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n.

ب. بيّن أنّ: $a_n\equiv0[5]$ إذا وفقط إذا كان $b_n\equiv0[5]$.

جـ. استنتج الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون a_n و b_n أوليّين فيما بينهما.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأول u_0 حيث: $u_0=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3-\frac{4}{u_n+2}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1<u_n<2$

2) أ . بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

ب. حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{u_n+\alpha}{u_n+1}$ ، حيث α عدد حقيقي.

أ . اوجد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، ثمّ احسب حدّها الأول v_0.

ب. بيّن عندئذٍ أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{2\times 4^n-1}{4^n+1}$، ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1+\frac{1}{4}(2e^{-x}-1)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول 2 cm).

1) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=(1-e^{-x})(2e^{-x}+1)$.

ب. ادرس اشارة $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغيّر الدّالة f .

جـ. احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

2) أ . بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x-\frac{3}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3) بيّن أنّ المنحنى البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

4) بيّن أنّ المنحنى البياني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها.

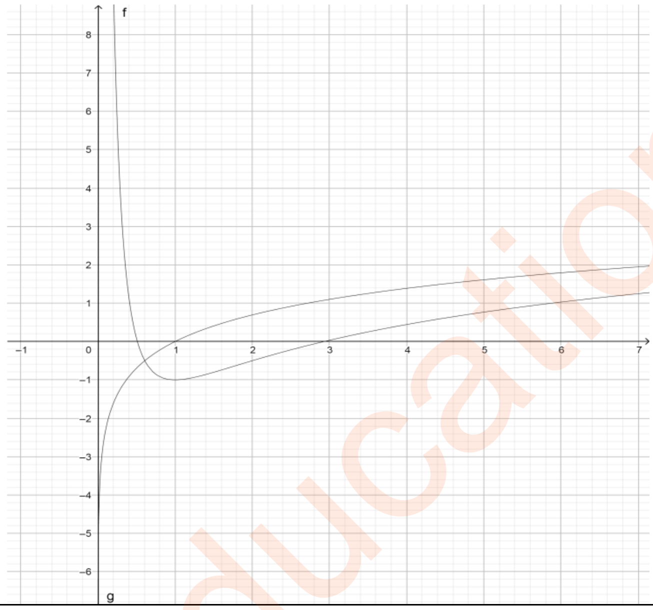
5) ارسم (Δ) ، (T) و المنحنى البياني (C_f).

6) ليكن m وسيطا حقيقيا. عيّن مجموعة قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة : $f(x)=x+m$ حلين مختلفين.

انتهى الموضوع الثاني

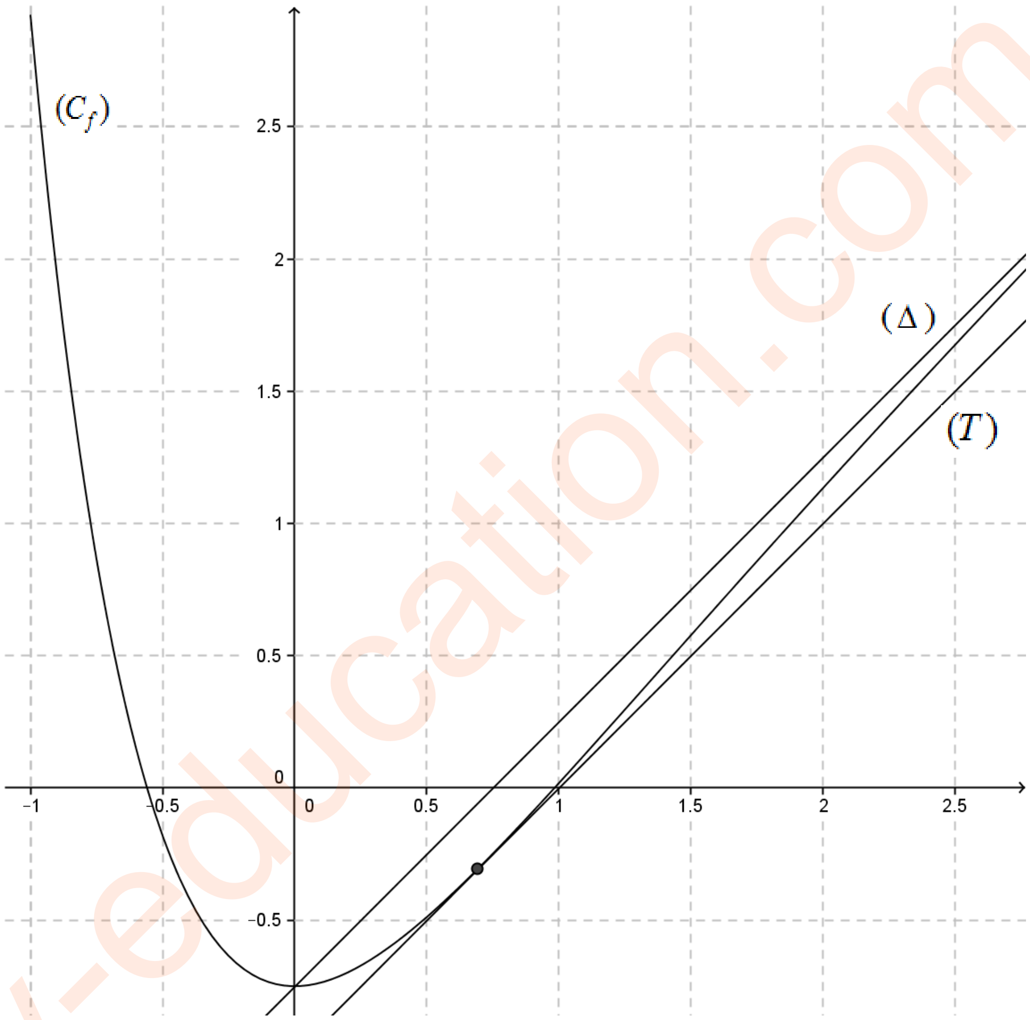
عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التّمرين الأوّل: (04 نقاط)		
1) أ) نقل الشّكل وتمثيل الحدود الأربعة الأوّلى على محور الفواصل	0.5	0.75
ب) وضع تخمين: (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة.	0.25	
2) أ) البرهان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \le u_n < 1$	0.5	1.5
ب) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n = \frac{u_n\left(3-\sqrt{4u_n^2+5}\right)}{\sqrt{4u_n^2+5}}$	0.5	
وبما أن $3-\sqrt{4u_n^2+5}>0$ فإن (u_n) متزايدة تماما. (تقبل كل طريقة صحيحة للحل)	0.25	
استنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة.	0.25	
3) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=\frac{9}{5}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{9}{5}$ و $v_0=\frac{1}{3}$	0.5 0.25	0.75
4) أ) عبارة الحد العام v_n: $v_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^n$ و $u_n=\sqrt{\frac{1}{1+3\left(\frac{5}{9}\right)^n}}$	0.25 0.5	1
ب) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$	0.25	
التّمرين الثّاني : (04 نقاط)		
1) نجد: $PGCD(693;216)=9$ واستنتاج : (E_1) و (E_2) متكافئتان	0.5+ 0.25	0.75
2) التّحقّق أنّ الثّنائية $(2;3)$ حلّ للمعادلة (E_2)	0.25	1
و حلول المعادلة (E_2) في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ هي الثنائيات: $(24k+2;77k+3)$; $k\in\mathbb{Z}$	0.75	
3) لدينا: $\lvert y-x\rvert \le 54$ يكافئ $k\in\{-1;0;1\}$ وبالتّالي: $(x;y)\in\{(-22;-74),(2;3),(26;80)\}$	0.75	0.75
4) $N=\overline{\beta 68\alpha}^{9}=\alpha+729\beta+558$ و $N=\overline{1\alpha\beta 0\alpha}^{6}=217\alpha+36\beta+1296$	2x0.5	1.5
مع $0\le\alpha<6$ و $0<\beta<6$		
لدينا: $\alpha+729\beta+558=217\alpha+36\beta+1296$ تكافئ $693\beta-216\alpha=738$ ومنه:	0.25	
$\alpha=3$ و $\beta=2$ و $N=2019$	0.25	

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموعة</th></tr>
<tr><td colspan="3">التّمرين الثّالث: (05 نقاط)</td></tr>
<tr><td>1) $P(A)=\frac{11}{21}$ ، $P(B)=\frac{12}{21}$.</td><td>2x0.75</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>2) أ) $P(A\cap B)=\frac{C_4^1\times C_1^1}{21}=\frac{4}{21}$</td><td>0.5</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>ب) الاستنتاج: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{19}{21}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>3) مجموعة قيم X هي $\{4;6;9\}$
وقانون احتمال X معرف بالجدول التّالي:
x_i: 4 ، 6 ، 9
$P(X=x_i)$: $\frac{10}{21}$ ، $\frac{10}{21}$ ، $\frac{1}{21}$</td><td>0.25
1.25</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>4) تكون اللّعبة عادلة من أجل $x^2-y^2=13$ ومنه: $x=7$ ، $y=6$.</td><td>2x0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">التّمرين الرابع: (07 نقاط)</td></tr>
<tr><td>I) 1) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{x+2}{x}$ و $g'(x)>0$
ومنه g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.</td><td>0.5
0.25</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>2) نجد: $g(1)=0$ ، $g(x)$ سالبة تماما على $]0;1[$ وموجبة تماما على $]1;+\infty[$</td><td>0.25+0.75</td><td>1</td></tr>
<tr><td>II) 1) أ) $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$. المستقيم ذي المعادلة $x=0$ مقارب للمنحنى (C_f)</td><td>2x0.25</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2) أ) من أجل كلّ عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$</td><td>0.5</td><td rowspan="3">1.25</td></tr>
<tr><td>ب) الدّالة f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>جدول التّغيرات</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>3) أ) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right)=0$.
التّفسير الهندسي: المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$</td><td>0.5
0.25</td><td rowspan="2">1.5</td></tr>
<tr><td>ب) لدينا: $f(x)-\ln x=-\frac{1}{x}(1+2\ln x)$
إشارة المقدار $f(x)-\ln x$
يكون المنحنى (C_f) فوق (Γ) على المجال $\left]0;e^{\frac{-1}{2}}\right[$ و تحت (Γ) على $\left]e^{\frac{-1}{2}};+\infty\right[$
و $(C_f)\cap(\Gamma)=\left\{A\left(e^{\frac{-1}{2}};\frac{-1}{2}\right)\right\}$</td><td>0.25
0.25
0.25</td></tr>
</table>

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
4) تبيان أن المنحنى (C_f) يتقاطع مع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β والتّحقّق أن: $0.5<\alpha<0.6$ و $2.9<\beta<3$	0.5 0.25	0.75
5) رسم (Γ) رسم (C_f) 	0.25 0.5	0.75

عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)	العلامة مجزأة	 مجموعة
التّمرين الأوّل: (04 نقاط)		
I) 1) لدينا عدد الحالات الممكنة : $C_9^3=84$ نجد: $P(A)=\frac{5}{84}$ ، $P(B)=1-\frac{5}{42}=\frac{37}{42}$	0.25 2x0.5	1.25
2) أ) قيم X هي 2 ، 3 و 4 $P(X=3)=\frac{3}{7}$ وقانون احتمال X : $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline x_i & 2 & 3 & 4\\ \hline P(X=x_i) & \frac{5}{21} & \frac{9}{21} & \frac{7}{21}\\ \hline\end{array}$	0.25 0.75 2x0.5	2.25
ب) $E(X)=\frac{65}{21}$	0.25	
II) عدد الحالات الممكنة: $A_9^3=504$ و منه: $P(C)=1-\frac{A_4^3}{504}=\frac{20}{21}$	2x0.25	0.5
التّمرين الثّاني: (04 نقاط)		
1) أ) دراسة بواقي قسمة 3^n على 5: من أجل $n=4k$ نجد $3^n\equiv1[5]$ ، من أجل $n=4k+1$ نجد $3^n\equiv3[5]$ من أجل $n=4k+2$ نجد $3^n\equiv4[5]$ ، من أجل $n=4k+3$ نجد $3^n\equiv2[5]$	1	1.5
ب) باقي قسمة العدد: $8^{2020}-2\times3^{1441}-1$ على 5 هو 4	0.5	
2) لدينا: $a_n\equiv0[5]$ يكافئ : $n=4k+3$ و k عدد طبيعي	0.75	0.75
3) أ) القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n هي 1 و 5	0.5	1.75
ب) بيان أنّ: $a_n\equiv0[5]$ اذا وفقط اذا كان $b_n\equiv0[5]$	0.5	
ج) قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n هو 5 هي $n=4k+3$ و k عدد طبيعي، بالتّالي: قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها a_n و b_n أوليان فيما بينهما هي: $n=4k$ ، $n=4k+1$ و $n=4k+2$ مع k عدد طبيعي	0.25 0.25 0.25	
التّمرين الثّالث: (05 نقاط)		
1) برهان بالتّراجع، انّه من اجل كل عدد طبيعي n: $-1<u_n<2$	1	1
2) أ) بيان انّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{(2-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$	0.5	1.25
ب) المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$. الاستنتاج: المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة	0.5 0.25	

عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
3) لدينا: $v_n = \dfrac{u_n+\alpha}{u_n+1}$ حيث α عدد حقيقي. أ) قيمة α حتى تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ هي -2 . ونجد $v_0=-1$	1 0.25	2.75
ب) من: $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$ نجد: $u_n=\dfrac{v_n+2}{1-v_n}$ ولدينا: $v_n=-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ بالتالي: $u_n=\dfrac{2\times 4^n-1}{4^n+1}$ ونجد: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$	0.5 0.75 0.25	
التّمرين الرابع: (07 نقاط)		
1) أ) بيان أنه من أجل كلّ x من $[-1;+\infty[$: $f'(x)=(1-e^{-x})(2e^{-x}+1)$	0.5	2
ب) $f'(x)<0$ على $[-1;0[$: و $f'(x)>0$ على $]0;+\infty[$ مع: $f'(0)=0$ الاستنتاج: الدّالة f متناقصة تماما على $[-1;0]$ و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$	0.5 0.25	
جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ جدول التّغيرات	0.5 0.25	
2) أ) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-\frac{3}{4})\right]=0$ ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f)	0.5	1.25
ب) من إشارة $\left[f(x)-(x-\frac{3}{4})\right]$ نجد: (C_f) فوق (Δ) على $[-1;0[$ و (C_f) تحت (Δ) على $]0;+\infty[$ و $(C_f)\cap(\Delta)=\left\{A\left(0;-\frac{3}{4}\right)\right\}$	0.5 0.25	
3) لدينا: $f'(x)=1$ يكافئ: $x=\ln 2$ بالتّالي (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) في النّقطة التي فاصلتها $\ln 2$ و $(T): y=x-1$	0.5 0.25	0.75
4) لدينا: من أجل كل x من $[-1;+\infty[$: $f''(x)=e^{-x}(4e^{-x}-1)$ و f'' تنعدم عند $\ln 4$ مغيّرة إشارتها بالتّالي $w\left(\ln 4;-\dfrac{15}{6}+\ln 4\right)$ نقطة انعطاف	0.5 0.5 0.25	1.25

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموعة</th></tr>
<tr><td>5) رسم (Δ) و (T)
رسم (C_f)

</td><td>2×0.25
0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6) حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$
بالتّالي للمعادلة حلّان مختلفان يكافئ $m\in\left]-1;-\frac{3}{4}\right[$</td><td>0.25
0.5</td><td>0.75</td></tr>
</table>