الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: **2020**

الشعبة: تسيير واقتصاد

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: **03** سا و**30** د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

إليك جدول تغيّرات دالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على كلّ من المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أجب بـ: صحيح أو خاطئ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

1) المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.

2) النّقطة $A(3;2)$ تنتمي إلى المنحنى (C_f).

3) $f(2020) > f(2019)$.

4) المستقيم ذو المعادلة $y=1$ يقطع (C_f) في نقطة واحدة.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يتقاضى موظف خلال 2019 راتبا شهريا ثابتا يقدر بـ 70 000 DA ، في شهر جانفي استهلك منه 80% و ابتداءً من شهر فيفري قرّر تخفيض مبلغ الاستهلاك شهريا بنسبة 5% من المبلغ المستهلك في الشهر الذي قبله.

1) أ. ما هو المبلغ المستهلك في شهر جانفي ؟

ب. حدّد المبلغ المستهلك في شهر فيفري.

2) نضع: u_1 المبلغ المستهلك في شهر جانفي و u_n المبلغ المستهلك في الشهر n ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

عبّر عن u_{n+1} بدلالة u_n و استنتج أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها 0.95 .

3) اكتب عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n .

4) أ. احسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019 .

ب. أوجد المبلغ المدخر خلال هذه السنة.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدّها الأول u_0 حيث: $u_0=1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{3}{2}$

1) أ . برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n<\frac{9}{2}$

ب. ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنّها متقاربة .

2) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $v_n=u_n-\frac{9}{2}$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يُطلب حساب حدّها الأول v_0 .

ب. عبّر عن v_n بدلالة n ثمّ احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$.

احسب S_n بدلالة n .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) الدالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2-1+\ln x$.

1) احسب كلا من $\lim_{x\xrightarrow{>}0}g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+2+x\ln x$.

(C_f) التّمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. (يُعطى : $\lim_{x\xrightarrow{>}0}x\ln x=0$)

2) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماما : $f'(x)=g(x)$.

3) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) احسب $f(2)$ ثمّ انشئ (C_f).

5) الدّالة F معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{5}{4}x^2+2x-8+\frac{1}{2}x^2\ln x$

بيّن أنّ F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثّلاثة التّالية مع التبرير.

1) الدّالة الأصلية لـ f على $\mathbb{R}$ التي تنعدم من أجل $x=1$ هي الدّالة F حيث:

أ) $F(x)=x^3-x^2$ ب) $F(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2$ جـ) $F(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+\frac{8}{9}$

2) القيمة المتوسطة للدّالة f على المجال $[0;1]$ هي:

أ) $\frac{1}{9}$ ب) $\frac{-8}{9}$ جـ) $\frac{8}{9}$

3) الدّالة f متزايدة تماما على المجال:

أ) $[3;+\infty[$ ب) $[-3;+\infty[$ جـ) $]-\infty;3]$

4) المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{-5}{3}$ يقطع المنحنى (C_f) في نقطتين فاصلتاهما:

أ) 1 و 5 ب) 1 و -5 جـ) -1 و -5

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المتتالية الهندسية (v_n) حدّها الأول v_0 وأساسها q موجبان تماما و: $\begin{cases}\ln v_5+\ln v_3=8\ln 2\\ \ln v_5-\ln v_3=2\ln 2\end{cases}$

1) بيّن أنّ: $v_3=8$ و $v_5=32$

2) أ . بيّن أنّ: $q=2$ و $v_0=1$

ب. اكتب v_n بدلالة n .

جـ. هل العدد 1024 حدّ من حدود المتتالية (v_n)؟

3) المتتالية (w_n) معرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=2n-3+2^n$

أ . تحقّق أنّ : $w_n=u_n+v_n$ ، حيث (u_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول u_0.

ب. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n=w_0+w_1+\cdots+w_n$

بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=(n+1)(n-3)+2^{n+1}-1$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدّها الأول u_0 حيث: $u_0=5$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{5}{7}u_n+\frac{6}{7}$

1) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n>3$

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنّها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 3$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب. اكتب عبارة v_n بدلالة n .

جـ. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\times(\frac{5}{7})^n + 3$ واحسب نهاية (u_n).

4) عيّن أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها: $u_n < \frac{7}{2}$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) الجدول المقابل هو جدول تغيرات الدّالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = 3x^3 - 2 + 4\ln x$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

1) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,9 < \alpha < 1$

2) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0;+\infty[$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 3x - 2 - \frac{2\ln x}{x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(تُؤخذ وحدة الطول $2cm$)

1) احسب كلا من $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (يُعطى : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$)

2) أ . بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 3x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

3) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

4) ارسم كلا من (Δ) و (C_f) . (تؤخذ $f(\alpha) \approx 0,9$)

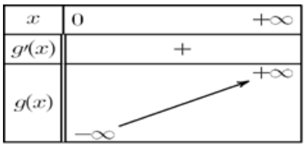
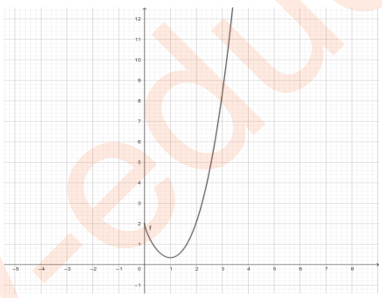
5) الدّالة H معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $H(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

أ . بيّن أنّ H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto -\frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$.

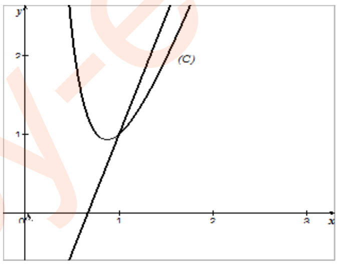
ب. احسب بـ cm^2 مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = 1$ و $x = 2$.

انتهى الموضوع الثاني

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموعة</th></tr>
<tr><td colspan="3">التّمرين الأوّل: (04 نقاط)</td></tr>
<tr><td>1) خاطئة، لأنّ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\neq 2$</td><td>2×0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2) خاطئة، لأنّ $f(3)<1$</td><td>2×0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3) صحيحة، لأنّ f متزايدة تماما على $]2;+\infty[$.</td><td>2×0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4) صحيحة، لأنّ $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا في $]-\infty;2[$ ولا تقبل حلا في $]2;+\infty[$</td><td>2×0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">التّمرين الثّاني: (04 نقاط)</td></tr>
<tr><td>1) أ. المبلغ المستهلك في شهر جانفي هو $56000DA$</td><td>0.5</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>ب. المبلغ المستهلك في شهر فيفري هو $53200DA$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2) نجد: $u_1=56000$ و $u_{n+1}=\frac{19}{20}u_n$
الاستنتاج: (u_n) متتالية هندسية أساسها 0.95</td><td>0.5
0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3) $u_n=u_1\times q^{n-1}$ أي $u_n=56000\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1}$</td><td>0.25
0.75</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4) أ. حساب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019
$u_1+u_2+u_3+....u_{12}=56000\frac{\left[1-\left(\frac{19}{20}\right)^{12}\right]}{1-\left(\frac{19}{20}\right)}=514796.7018\ DA$</td><td>0.5</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>ب. المبلغ المدّخر خلال هذه السنة
$12\times 70000-514796.7018=325203.2982DA$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td colspan="3">التّمرين الثّالث: (04 نقاط)</td></tr>
<tr><td>1) أ. إثبات بالتّراجع أنّه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n<\frac{9}{2}$</td><td>0.75</td><td rowspan="2">1.5</td></tr>
<tr><td>ب. $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}\left(u_n-\frac{9}{2}\right)$ ومنه $u_{n+1}-u_n\geq 0$
استنتاج أن (u_n) متقاربة</td><td>0.5
0.25</td></tr>
<tr><td>2) أ. نجد: $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و $v_0=-\frac{7}{2}$</td><td>0.5
0.25</td><td rowspan="2">1.75</td></tr>
<tr><td>ب. $v_n=-\frac{7}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$
لدينا: $u_n=-\frac{7}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{9}{2}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{9}{2}$</td><td>0.25
0.25
0. 5</td></tr>
<tr><td>3) $S_n=\frac{21}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right)+\frac{9}{2}(n+1)$</td><td>0.75</td><td>0.75</td></tr>
</table>

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)
مجموعة	مجزأة	
		التّمرين الرابع: (08 نقاط)
1	2×0.5	**I) 1)** $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$
1	0.25 0.25 0.5	**2)** من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x) = \frac{2x^2+1}{x}$ الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ جدول التغيرات 
1	0.25 0.75	**3)** لدينا: $g(1) = 0$ و بما أن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن: g سالبة تماما على المجال $]0;1[$ وموجبة تماما على المجال $]1;+\infty[$
1	2×0.5	**II) 1)** $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x) = 2$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
1	1	**2)** $f'(x) = x^2 - 1 + \ln(x) = g(x)$
1	0.5 0.5	**3)** الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$ جدول تغيّرات.
1	0.25 0.75	**4)** $f(2) = \frac{2}{3} + 2\ln 2$ إنشاء (C_f) 
1	1	**5)** من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $F'(x) = f(x)$

عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)	العلامة: مجزأة	العلامة: مجموعة
التّمرين الأوّل: (04 نقاط):		
1) الاقتراح الصحيح: جـ)، لأنّ $F'(x)=f(x)$ و $F(1)=0$	2×0.5	1
2) الاقتراح الصحيح: ب)، لأنّ $\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=-\frac{8}{9}$	2×0.5	1
3) الاقتراح الصحيح: أ)، لأنّ $f'(x)\geq 0$ على المجال $[3;+\infty[$	2×0.5	1
4) الاقتراح الصحيح: أ)، لأنّ $f(x)=\frac{-5}{3}$ تكافئ $x=1$ أو $x=5$	2×0.5	1
التّمرين الثّاني: (04 نقاط)		
1) بيان أنّ: $v_5=32$ و $v_3=8$	2× 0.5	1
2) أ . بيان أنّ: $q=2$ و $v_0=1$	0.75 0.25	02
ب. $v_n=2^n$	0.5	
جـ. $v_n=1024$ يكافئ $2^n=2^{10}$ وبالتالي $n=10$	0.5	
3) أ . $w_n=u_n+v_n$ حيث: $u_n=2n-3$ و (u_n) حسابية أساسها 2 و $u_0=-3$	0.5	1
ب. بيان أنّ: $S_n=(n+1)(n-3)+2^{n+1}-1$	0.5	
التّمرين الثّالث: (04 نقاط)		
1) البرهان بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n>3$	0.25 0.75	1
2) (u_n) متناقصة تماما (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة	0.75 0.25	1
3) أ . $v_{n+1}=\frac{5}{7}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{7}$ و $v_0=2$	0.75 0.25	1.75
ب. $v_n=2\left(\frac{5}{7}\right)^n$	0.25	
جـ. استنتاج أنّ: $u_n=2\times\left(\frac{5}{7}\right)^n+3$ و $\lim_{n\to\infty}u_n=3$	2x0.25	
4) $u_n<\frac{7}{2}$ تكافئ $n>\frac{\ln\frac{1}{4}}{\ln\frac{5}{7}}$ ومنه أصغر قيمة لـ n هي 5	0.25	0.25

عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التّمرين الرابع: (08 نقاط)		
I) 1) g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ وتأخذ قيمها في $]-\infty;+\infty[$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;+\infty[$ وبما أنّ: $g(0.9)\times g(1)<0$ فإنّ: $0.9<\alpha<1$	0.75 0.25	1
2) على المجال $]\alpha;+\infty[$: $g(x)>0$ وعلى $]0;\alpha[$: $g(x)<0$ و $g(\alpha)=0$	0.5	0.5
II)1) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	2×0.5	1
2) أ . $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x-2)\right)=0$ ومنه $(\Delta): y=3x-2$ مقارب مائل لـ (C_f).	0.25	1
ب. وضعية (C_f) بالنسبة (Δ): x: 0 ، 1 ، $+\infty$ ؛ $f(x)-(3x-2)$: + ، 0 ، - (C_f) فوق (Δ) على $]0;1[$ (C_f) تحت (Δ) على $]1;+\infty[$. (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$.	0.25 0.5	
3) أ . بيان أنّ: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$	0.5	1.5
ب. f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;\alpha]$ جدول التغيرات	0.5 0.5	
4) انشاء (Δ) و (C_f). 	0.25 0.75	1
5) أ . من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $H'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$	1	2
ب. حساب المساحة: $\int_1^2 f(x)\,dx=2(3+2\ln 2)cm^2$	1	